

Repetition 2

Strategi för att visa att gränsvärde existerar

- *Instängningsregeln*: Om

$$f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$$

och

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y)$$

så är

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$$

Strategi för att visa att gränsvärde *inte* existerar

- Om $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ så måste

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\mathbf{r}(t)) = L$$

för *alla* kurvor $\mathbf{r}(t)$ med $\mathbf{r}(t_0) = \langle a, b \rangle$.

Om då får olika gränsvärden, t.ex., längs olika räta linjer genom (a, b) så finns gränsvärdet *inte*.

Ex Beräkna gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ eller förklara varför det inte existerar.

(Om inte kan använda någon av strategierna från förra gången, kan alltid prova längs räta linjer. Kan visa att gränsv. inte finns, eller säga vad gränsv. måste vara om det existerar.)

Provar längs allmän rät linje genom origo: $\mathbf{r}(t) = \langle kt, lt \rangle$, $\langle k, l \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle$.

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \langle 0, 0 \rangle \text{ när } t \rightarrow 0.$$

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(kt, lt) = \frac{kt^3}{(kt)^2 + (lt)^2} = \frac{kt}{k^2 + l^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ oavsett vad } k, l \text{ är}$$

Alltså: Om gränsv. finns måste det vara 0. Inte uppenbart hur kan visa detta genom att skriva om/förenkla eller skriva som sammansättning. Försöker med instängningsregeln.

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x|$$

så om $f(x,y) = -|x|$, $g(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, $h(x,y) = |x|$ är alltså

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y).$$

Eftersom $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y)$ är då enl. instängningsregeln:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0.$$

Kontinuitet

$f(x,y)$ kontinuerlig i (a,b) om

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Exempel på övningen idag

Lokala extremvärden

Om $f(x, y)$ har lokalt max/min i (a, b) så är (a, b) en **kritisk punkt**, dvs $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$

Modelfall:

$$x^2 + y^2 \quad \text{lokalt min i } (0,0)$$

$$-x^2 - y^2 \quad \text{lokalt max i } (0,0)$$

$$-x^2 + y^2, x^2 - y^2 \quad \text{sadelpunkt i } (0,0), \text{ dvs kritisk punkt men varken lokalt max eller min}$$

Andraderivatatestet:

(a, b) en kritisk punkt till $f(x, y)$

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

$$\underline{D > 0}: \quad \text{a) } f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow \text{lokalt min}$$

$$\text{b) } f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow \text{lokalt max}$$

$$\underline{D < 0}: \quad \text{sadelpunkt}$$

Hur komma ihåg? Jämför med modellfallen

Ex Hitta kritiska punkter till $f(x,y) = (x^2 - xy)e^{-y}$.
För en av dessa punkter, avgör om den är ett lok. max/min eller
sadelpunkt.

Kritiska punkter
$$\begin{cases} f_x = (2x - y)e^{-y} = 0 \\ f_y = -xe^{-y} + (x^2 - xy) \cdot (-1) = -x(x - y + 1)e^{-y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x & (1) \\ -x(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ el. } x - y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Two fall i (2):

$x=0$ Sätter in i (1): $y = 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{(0,0)}$ en kritisk punkt

$x - y + 1 = 0$ Sätter in i (1) i delta: $x - (2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Sätter in delta i (1): $y = 2x = 2 \Rightarrow \underline{(1,2)}$ en kritisk punkt.

I (1,2): Kan räkna efter:

$$\begin{aligned} f_{xx}(1,2) &= 2e^{-2}, \\ f_{xy}(1,2) &= -e^{-2} \\ f_{yy}(1,2) &= e^{-2} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} f_{xx} &= 2e^{-y}, \\ f_{xy} &= -e^{-y} - (2x - y)e^{-y} = (y - 2x - 1)e^{-y}, \\ f_{yy} &= xe^{-y} + x(x - y + 1)e^{-y} = (x^2 + 2x - xy)e^{-y} \end{aligned} \right)$$

$$D(1,2) = f_{xx}(1,2)f_{yy}(1,2) - f_{xy}(1,2)^2 = 2e^{-2} \cdot e^{-2} - (-e^{-2})^2 = (2-1)e^{-4} = e^{-4} > 0$$

och $f_{xx}(1,2) > 0 \Rightarrow (1,2)$ är ett lokalt minimum.

Globala extremvärden

Om $f(x, y)$ kontinuerlig på sluten begränsad mängd D så har f globalt max och min på D .

Om f deriverbar kan de bestämmas genom att jämföra värdena i:

- 1) Kritiska punkter inuti D
- 2) Punkter på randen till D . Kan preciseras om parametriserar randen med kurvor:
 - a. Kritiska punkter längs randkurvorna
 - b. "Hörn", dvs ändpunkter till randkurvorna.

Tenta 2018-10-03 3) Bestäm globala max och min till $f(x, y) = x + y$ där (x, y) ligger i området D som begränsas av kurvorna $y = 4 - x^2$ och $y = 0$.

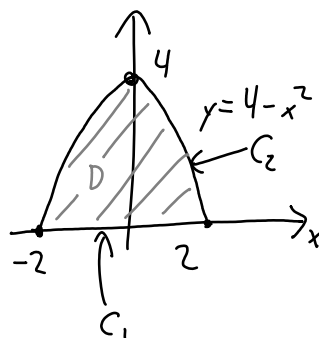
1) Kritiska punkter i D : $\begin{cases} f_x = 1 = 0 \\ f_y = 1 = 0 \end{cases}$ saknar lösningar!

Inga kritiska punkter i D !

2) Parametriserar randen: Kurvorna skär varandra där $4 - x^2 = y = 0$
 $\Rightarrow x = \pm 2, y = 0$.

$C_1: r_1(x) = \langle x, 0 \rangle, -2 < x < 2$

$C_2: r_2(x) = \langle x, 4 - x^2 \rangle, -2 < x < 2$.



a) Kritiska punkter längs randkurvor:

$$\underline{C_1}: g_1(x) = f(r_1(x)) = f(x, 0) = x$$

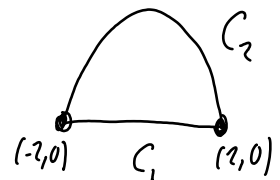
Krit. punkter $g_1'(x) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ inga krit. punkter.

$$\underline{C_2}: g_2(x) = f(r_2(x)) = f(x, 4-x^2) = x + 4 - x^2$$

Krit. punkter: $g_2'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$

$$\text{Kandidat: } \boxed{g_2\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}}$$

b) "Hörn", dvs. ändpunkter till randkurvorna:



$$\text{Kandidater: } \boxed{\begin{aligned} f(-2, 0) &= -2 \\ f(2, 0) &= 2 \end{aligned}}$$

Svar: $\max \frac{17}{4}$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$ och $\min -2$ i $(-2, 0)$.

Optimering med bivillkor - Metoden med

Lagrangemultiplikatorer:

För att hitta extremvärden till $f(x, y)$ under bivillkoret att $g(x, y) = k$ (om extremvärden finns och $\nabla g(x, y) \neq 0$ på $g(x, y) = k$):

- 1) Hitta alla lösningar (x, y) till $\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$ för någon konstant λ .
- 2) Beräkna $f(x, y)$ för alla lösningar från 1). Det största värdet ger maximum och det minsta minimum.

Exempel på övningen idag.

Kurvor i rummet

Kurva C parametriserad av $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$,
 $a \leq t \leq b$

Tangentvektor $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$

ger riktningsvektor för tangentlinjen genom $\mathbf{r}(t)$:

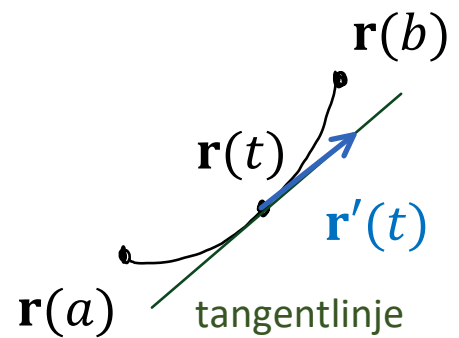
$$L(s) = \mathbf{r}(t) + s\mathbf{r}'(t)$$

Längd $\int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$

Kurvintegral av funktion f :

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

$$(ds = |\mathbf{r}'(t)| dt)$$



Exempel på övningen idag.

Dubbelintegraler

$$f(x, y) \geq 0:$$

$\iint_D f(x, y) dA = \text{volymen av området under grafen } z = f(x, y)$

Kan beräknas med *upprepad integral* t.ex. om

$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}$ är

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$$

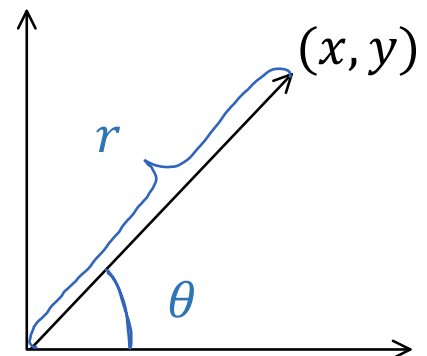
och motsvarande om gränser i x beror på y .

Polära koordinater

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Integration över "polär rektangel" D :

$$a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$$



$$\underline{dA = r d\theta dr = r dr d\theta:}$$

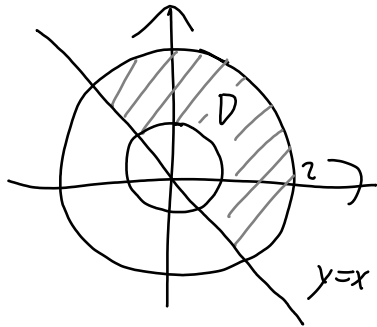
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

(eller i andra ordningen med integration i θ ytterst)

Ex Beräkna masscentrum av delen D av

$\{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ som ligger över linjen $y = -x$,

där D antas ha konstant densitet 1.



D i polära koordinat:

$$1 \leq r \leq 2,$$

$$-\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$$

massa $m = \int \int_D \rho dA = \int_1^2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} r d\theta dr = \pi \int_1^2 r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \pi \frac{4-1}{2} = \frac{3\pi}{2}.$

masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_x}{m}, \frac{M_y}{m} \right)$

$$M_x = \int \int_D x \rho dA = \int_1^2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} r \cos \theta r d\theta dr = \int_1^2 r^2 \left[\sin \theta \right]_{-\pi/4}^{3\pi/4} dr = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_1^2 r^2 dr =$$

$$= \sqrt{2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

Av symmetriskäl, allt. liknande räkningar som ovan, $\bar{y} = \bar{x}$, så masscentrum är

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{7\sqrt{2}/3}{3\pi/2}, \frac{7\sqrt{2}/3}{3\pi/2} \right) = \left(\frac{14\sqrt{2}}{9\pi}, \frac{14\sqrt{2}}{9\pi} \right)$$

(Ser att $\bar{x} = \bar{y} < \sqrt{2}$ så innanför yttre cirkeln, som bör vara.)
I själva verket, $\bar{x} = \bar{y} \approx 1/\sqrt{2}$