

Repetition 3

Trippelintegraler

Upprepade integraler, t.ex.:

$$E = \{ (x, y, z) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq z \leq b(y), e(y, z) \leq x \leq f(y, z) \}$$

$$\iiint_E g(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} \int_{e(y, z)}^{f(y, z)} g(x, y, z) dx dz dy$$

$$\iiint_E dV = \text{volym av området } E$$

Cylindriska koordinater

Polära koordinater i xy -planet:

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$\underline{dV = r \, dr \, d\theta \, dz}$$

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

$$(0 \leq \rho$$

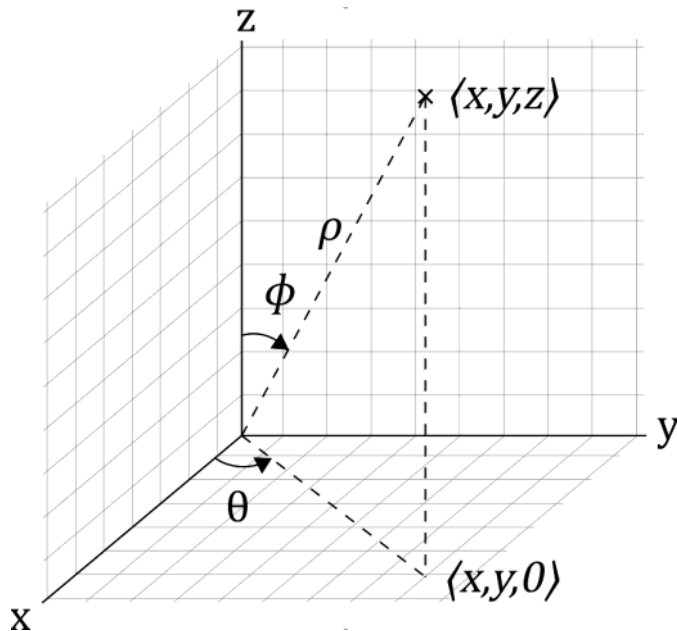
$$0 \leq \phi \leq \pi,$$

$$\text{oftast } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{el. } -\pi \leq \theta \leq \pi)$$

Integration:

$$\underline{dV = \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho}$$



Anpassad från "3D Spherical 2.svg"

© Dmcq [CC BY-SA 3.0] / Wikipedia Commons

Kurvintegraler av vektorfält

C kurva, parametrisering $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, $\mathbf{F}$ vektorfält

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Om $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$, skrivs integralen också

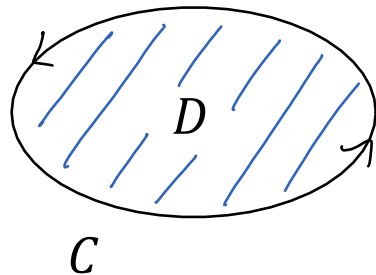
$$\int_C P dx + Q dy$$

dvs. om $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ så är

$$dx = x'(t) dt \text{ och } dy = y'(t) dt.$$

Greens formel: Låt C vara en enkel sluten positivt orienterad kurva som begränsar området D . Då är

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



Konservativa vektorfält

$\mathbf{F}$ konservativt om $\mathbf{F} = \nabla f$

Om C kurva som börjar i $P = \mathbf{r}(a)$ och slutar i $Q = \mathbf{r}(b)$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(Q) - f(P)$$

På $\mathbb{R}^2$ (eller enkelt sammanhängande områden)

$\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ konservativt precis om $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

"derivatan av *första* komponenten m.a.p. *andra* variabeln
= derivatan av *andra* komponenten m.a.p. *första* variabeln"

Rotation av vektorfält på $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\langle \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle .$$

På $\mathbb{R}^3$:

F konservativt precis när **rot F = 0**.

Ytintegraler på yta S , parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$

$$\iint_S f(x, y, z) dS \text{ där } dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA$$

Speciellt, om S grafen till $f(x, y)$: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \langle -f_x, -f_y, 1 \rangle \text{ (formelsamling)}$$

och då

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Flöde genom oriententerad yta S

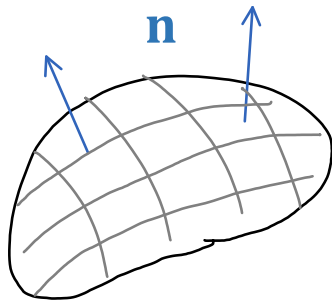
parametriserad av $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, orientering $\mathbf{n}$

$$d\mathbf{S} = \pm(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$

(+ om $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ pekar i samma riktning som $\mathbf{n}$, - annars)

Flöde genom S :

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dA$$



$$\mathbf{F} = \langle P, Q, R \rangle: \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergenssatsen

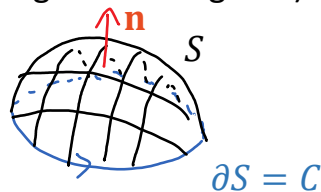
S randen till område $E \subseteq \mathbb{R}^3$, orientering pekar ut från E

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Stokes sats

Yta S har rand $C = \partial S$, (orienterad moturs kring orientering av S)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



Hur kan kurvintegraler respektive flödesintegraler av vektorfält beräknas?

Dessa kan alltid ställas upp som integraler ifrån definitionen, men ibland leder detta till komplicerade integraler, som kan beräknas enklare med hjälp av någon sats.

Hur kan kurvintegraler av vektorfält beräknas?

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

- Alltid möjligt
 - Enligt definitionen ($d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt$)
- Om $\mathbf{F}$ konservativt
 - Med hjälp av huvudsatsen för kurvintegraler
- Om C är randen till ett område $D \subseteq \mathbb{R}^2$
 - Med hjälp av Greens formel
- Om C är randen till en yta $S \subseteq \mathbb{R}^3$
 - Med hjälp av Stokes sats

Hur kan flödesintegraler av vektorfält beräknas?

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

- Alltid möjligt:
 - Enligt definitionen ($d\mathbf{S} = \pm \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v dA$)
- Om S en sluten yta, dvs. randen till område $E \subseteq \mathbb{R}^3$
 - Med hjälp av divergenssatsen
- Om $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$ för något vektorfält $\mathbf{G}$
 - Med hjälp av Stokes sats