

3.5 Summor

Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ vara (reella) tal. Summan av dem kan skrivas med hjälp av summasymbolen $\sum$ (stora sigma):

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Som summationsindex (k i det här fallet) kan vi välja vilken bokstav som helst som inte redan är "upptagen" (som n i det här fallet):

Ex: $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j \neq \sum_{k=1}^n a_j = \underbrace{a_j + a_j + \dots + a_j}_{n \text{ termer}} = n a_j$

Ex: Beräkna summan $\sum_{k=1}^4 \frac{k}{k+2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \frac{k}{k+2} &= \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+2} + \frac{3}{3+2} + \frac{4}{4+2} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{10}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{21}{10} \end{aligned}$$

Ibland vill man inte börja från 1 utan från något annat heltal $m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad \left(\begin{array}{l} \text{endast en term} \\ \text{om } m=n \end{array} \right)$$

(Om $m > n$ låter vi $\sum_{k=m}^n a_k = 0$)

Vi kan betrakta talen $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ som funktionsvärden för en funktion

$$a: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad k \mapsto a_k$$

$$\text{där } S = \{m, m+1, \dots, n\} \subset \mathbb{Z}.$$

För godtyckliga ändliga definitionsmängder S (behöver inte ens bestå av tal, det viktiga är att målmängden gör det) kan vi skriva summan av funktionsvärdena som $\sum_{k \in S} a_k$.

Ex 3.22

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \left\{ \begin{array}{l} \text{alla människor som betalar skatt till den} \\ \text{svenska staten ett visst år} \end{array} \right\} \\ a_i = \text{den skatt som "person } i \text{" betalar} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in M} a_i = \text{statens totala skatteintäkt från privatpersoner detta år.}$$

Tre bra regler för summor:

$$(1) \quad \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$

$$(2) \quad \text{Om } m \leq n \leq p \text{ så: } \sum_{k=m}^p a_k = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=n+1}^p a_k$$

$$(3) \quad \sum_{k=-n}^{-m} a_k = \sum_{k=m}^n a_{-k}$$



$$\underline{\text{Ex:}} \quad \sum_{k=-3}^3 k(k+1) = \sum_{k=-3}^3 (k^2 + k) = \textcircled{1}$$

$$= \sum_{k=-3}^3 k^2 + \sum_{k=-3}^3 k = \textcircled{2}$$

$$= \left(\sum_{k=-3}^{-1} k^2 + \sum_{k=0}^3 k^2 \right) + \left(\sum_{k=-3}^{-1} k + \sum_{k=0}^3 k \right) = \textcircled{3}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^3 (-k)^2 + \sum_{k=1}^3 k^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^3 (-k) + \sum_{k=1}^3 k \right) = \textcircled{1}$$

$$= \sum_{k=1}^3 \left((-k)^2 + k^2 + (-k) + k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^3 \left(2k^2 - k + k \right) = 2 \sum_{k=1}^3 k^2 =$$

$$= 2(1^2 + 2^2 + 3^2) = 2(1 + 4 + 9) = \underline{28}$$

Vissa summor kan förenklas på följande sätt:

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \sum_{m=1}^{100} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{10100} =$$

$$= \sum_{m=1}^{100} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) =$$

$$= \left(\underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)}_{=0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right)}_{=0} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{101}{101} - \frac{1}{101} = \underline{\underline{\frac{100}{101}}}$$

Sådana summor kallas teleskopsummor!

Produktsymbolen $\prod$ (stora pi) används för produkter på precis samma sätt som summasymbolen $\sum$ för summor.

Ex: $\prod_{k=1}^5 k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

På motsvarande sätt kan man använda en stor union- eller snittsymbol för unionen eller snittet av en ändlig uppsättning mängder.

Ex: $\bigcup_{k=1}^5 A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$

Venn diagram:

