

Inledande diskret matematik, Ht 2019
Extra material i kombinatorik (Kapitel 6)

1. Bollar i lådor

Sats. *Antalet sätt att placera k identiska bollar i n urskiljbara lådor är $\binom{n+k-1}{k}$.*

BEVIS: Eftersom bollarna är identiska är det enda som är viktigt hur många bollar som hamnar i varje låda. Eftersom lådorna är urskiljbara kan vi föreställa oss att de är numrerade, säg $1, 2, \dots, n$. Låt x_i vara antalet bollar som hamnar i låda i . Då söker vi antalet lösningar till ekvationen

$$x_1 + \dots + x_n = k, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad x_i \geq 0. \quad (1)$$

Det finns en naturlig 1-1-korrespondens mellan lösningarna till (1) och alla sätt att rita k prickar och $n - 1$ vertikala streck i en följd efter varandra. För vi kan tolka x_1 som antalet prickar före det 1:a strecket, x_2 som antalet prickar mellan 1:a och 2:a strecket och så vidare, fram till x_n som är antalet prickar efter sista strecket. Till exempel, då $n = 5$ och $k = 7$ har vi

$$\bullet \bullet \bullet \mid \bullet \mid \bullet \bullet \mid \mid \bullet \quad \leftrightarrow \quad 3 + 1 + 2 + 0 + 1 = 7.$$

Men antalet uppsättningar av prickar och streck är uppenbarligen $\binom{n+k-1}{k}$ för det gäller att välja i vilka k av de totalt $k + (n - 1)$ positionerna som man ska placera prickarna.

2. Sällprincipen

Kom ihåg binomialsatsen (Sats 6.14):

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (2)$$

Om vi sätter $x = -1$ och $y = 1$ så får vi att

$$0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}. \quad (3)$$

Notera att detta kan skrivas om till

$$\sum_{k \text{ jämn}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ udda}} \binom{n}{k}, \quad (4)$$

som säger just att antalet delmängder till $\{1, 2, \dots, n\}$ med ett jämnt antal element är lika med antalet delmängder med ett udda antal element. Ekvation (3) leder oss också till den allmänna formuleringen av sällprincipen:

Sats. Låt $A_1, A_2, \dots, A_n$ vara ändliga delmängder till något universum U . Då gäller att

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \left(\sum_{i=1}^n |A_i| \right) - \left(\sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \right) + \left(\sum_{i \neq j \neq k \neq i} |A_i \cap A_j \cap A_k| \right) - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \quad (5)$$

BEVIS: Låt x vara ett godtyckligt element av unionen. Vi måste bevisa att x räknas exakt en gång i högerledet. Säg att x tillhör m av de n mängderna och att vi numrerar mängderna så att det är $A_1, A_2, \dots, A_m$ som x tillhör. Då gäller att

- (i) x räknas $m = \binom{m}{1}$ gånger i första summan i HL, nämligen en gång för varje A_i som den tillhör,
- (ii) x räknas bort $\binom{m}{2}$ gånger i den andra summan, nämligen en gång för varje par $\{i, j\}$ så att den tillhör både A_i och A_j ,
- (iii) x räknas $\binom{m}{3}$ gånger i den tredje summan,
- (iv) och så vidare, tills att den räknas $(-1)^{m+1} \binom{m}{m} = (-1)^{m+1}$ gånger i termen $(-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$.

Så antalet gånger som x räknas i högerledet är $\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \binom{m}{k}$. Från (3) ser vi att denna alternerande summa av binomialkoefficienter hade varit noll om inte för att termen $(-1)^1 \binom{m}{0}$ saknas i början. Således är summan lika med $\binom{m}{0} = 1$, det vill säga x räknas totalt en gång, vilket skulle visas.

Exempel. Bestäm antalet surjektiva funktioner från $\mathbb{Z}_7$ till $\mathbb{Z}_4$.

LÖSNING: För att underlätta med notation, beteckna $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Låt universumet U bestå av alla funktioner från $\mathbb{Z}_7$ till $\mathbb{Z}_4$, så $|U| = 4^7$. Vi definierar fyra delmängder till U enligt

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f \in U : 0 \notin V_f\}, \\ A_2 &= \{f \in U : 1 \notin V_f\}, \\ A_3 &= \{f \in U : 2 \notin V_f\}, \\ A_4 &= \{f \in U : 3 \notin V_f\}. \end{aligned}$$

Per definition består unionen $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ av alla icke-surjektiva funktioner i U . Vi vill alltså räkna bort dessa, så svaret på uppgiften kommer att bli

$$4^7 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|. \quad (6)$$

Vi tillämpar sällprincipen för att beräkna storleken av unionen. Först betrakta något A_i , det spelar ingen roll vilken så säg A_1 . Eftersom noll tillhör ej värdemängden så innebär det att vi har tre val i stället för fyra för vart varje element i $\mathbb{Z}_7$ ska skickas. Således är $|A_1| = 3^7$. Densamma gäller för de övriga A_i så första summan i högerledet av (5) blir $4 \cdot 3^7$.

Härnäst betraktar vi ett snitt mellan två av mängderna A_i . Åter igen spelar det ingen roll vilka två, så låt oss ta $A_1 \cap A_2$. Per definition så består denna mängd av de funktioner som missar både 0 och 1. Med andra ord det finns nu bara två val för vart varje element i $\mathbb{Z}_7$ ska skickas, så $|A_1 \cap A_2| = 2^7$. Det finns $\binom{4}{2} = 6$ parvisa snitt så den andra summan i högerledet av (5) blir $6 \cdot 2^7$.

Med liknande resonemang ser vi att den tredje summan i högerledet av (5) blir $\binom{4}{3} \cdot 1^7 = 4$. Då tar det stopp ty $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$, för en funktion kan inte missa allt i målmängden.

Insättning av allt i (5) och sedan (6) ger att antalet surjektiva funktioner är

$$4^7 - (4 \cdot 3^7 - 6 \cdot 2^7 + 4) = \dots = 8400.$$

3. Multinomialsatsen

Det är naturligt att fråga om vi kan utvidga binomialsatsen till fler än två variabler. Svaret är ja, men det är lite krångligt att skriva ner. Vi nöjer oss med ett exempel som visar hur det funkar med tre variabler och hoppas att det allmänna mönstret blir klart.

Exempel. Bestäm koefficienten för $x^6 y^7 z^4$ i utvecklingen av $(x + y + z)^{17}$.

Att "utveckla" $(x + y + z)^{17}$ betyder att man ställer upp

$$(x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z) \quad 17 \text{ gånger}$$

och plockar ut antingen x , y eller z från varje parentes. Det finns totalt 3^{17} sätt att plocka, alltså kommer hela utvecklingen att bestå, innan vi samlar termer av samma art, av totalt 3^{17} termer. Frågan är hur många av dessa termer som kommer att bli $x^6 y^7 z^4$. För att få en sådan term måste vi plocka x ur 6 parenteser, y ur 7 st och sedan z ur 4 st. Antalet sätt att göra detta är $\binom{17}{6} \times \binom{11}{7} \times \binom{4}{4} = \frac{17!}{6!7!4!}$. Så detta blir koefficienten av $x^6 y^7 z^4$.