Urvalsaxiomet och några av dess konsekvenser

Johan Jonasson

December 2019

Matematiken är uppbyggd kring logiska slutledningsregler och *axiom*. Exempel på axiom är Guiseppe Peanos axiom om de postiva heltalen (1889):

- Det finns ett minsta tal 1.
- Till varje tal x finns en efterföljare $s(x)$.
- För alla x gäller att $s(x) \neq 1$.
- Om $s(x) = s(y)$ gäller att $x = y$.
- Om $1 \in M$ och det för alla $x \in M$ gäller att $s(x) \in M$, innehåller M alla tal (induktionsaxiomet)

Produktmängder:

- $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$,
- $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots) : \forall i : a_i \in A_i\}$,
- $\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} : \forall i : a_i \in I\}$.

Urvalsaxiomet: Om $A_i \neq \emptyset$ för alla i gäller att $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Verkar ju ganska självklart, eftersom om $A_i = \{a_i\}$ för alla i så blir ju $\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I}\}$ och UA borde ju inte spricka för att mängderna blir större?

UA är mycket viktig inom analysen. Exempelvis Hahn-Banachs sats om att en linjär funktional på ett delrum till ett vektorrum kan utvidgas till hela rummet, kräver UA.

Å andra sidan är UA inte konstruktivt; det finns ingen metod att välja ett element i $\prod_{i \in I} A_i$.

UA och hattar: Ett oändligt antal personer får varsin hatt på sig. Hatten vit eller svart (0 eller 1) vald på måfå. Ingen kan se färgen på sin egen hatt, men på alla andras. Ingen får tala om för någon annan vad denne har för färg på sin hatt. De deltagande ställer sig på en (oändligt lång) rad.

Det finns en strategi som gör att alla utom ändligt många gissar rätt om sin egen färg!

Färgerna på hattarna bildar en följd av nollor och ettor $x = (x_1, x_2, \ldots)$, t.ex. 0010011110101001.....
Kalla två följder *ekvivalenta*, $x \sim y$ om $x_i = y_i$ för alla utom högst ändligt många i. Detta ger en gruppering av mängden av alla följder (grupperna kallas ekvivalensklasser).

(Relationen $\sim$ kallas en *ekvivalensrelation* eftersom den uppfyller (i) $x \sim x$, (ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, (iii) $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.)

För varje ekvivalensklass K, välj en representant $x^K \in K$. Det är här som UA kommer in; det krävs för att kunna göra det här valet.

Observation: alla kan se vilken ekvivalensklass K som den sanna följden x^0 tillhör.

Strategi: Den som står på position i gissar att hen har färg x_i^K. Eftersom $x_i^K = x_i^0$ för alla utom ändligt många i är saken klar.

UA och mätbarhet. Låt C vara cirkeln av omkrets 1; $C = \mathbb{R}$ mod 1. Dvs, C är $[0, 1)$ med addition "definerad" via att låta $x + y$ vara $x + y - 1$ om $x + y \geq 1$ (olika betydelser av plustecknet, därför "definera").

För varje $A \subseteq C$ vill vi definiera längden $\ell(A)$. Det visar sig bli problematiskt!

För $x, y \in C$, säg att $x \sim y$ om $x - y$ är rationell.

Bilda en mängd A genom att välja en representant från varje ekvivalensklass och låta A bestå av alla dessa representanter. För alla $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, skriv $A_q = \{a + q : a \in A\}$.

A_q:na är disjunkta: Låt $r \neq q$, $r, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$.

Antag att $x \in A_r \cap A_q$. Då finns $y \in A$ och $z \in A$ så att $x = r + y = q + z$. Detta ger

$$y - z = q - r \in \mathbb{Q}.$$

Alltså $y \sim z$ och då kan ju inte båda ingå i A; motsägelse.

A_q:na täcker hela C: Alla $x \in C$ ingår i någon ekvivalensklass, dvs det finns ett $y \in A$ så att $x \sim y$. Alltså $x \in A_{x-y}$ och $x - y \in \mathbb{Q}$.

Alla A_q är bara rotationer av varandra och vi borde ha $\ell(A_q) = \ell(A_r)$ för alla $r, q \in \mathbb{Q}$.

Samtidigt borde vi ha

$$1 = \ell(C) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \ell(A_q).$$

Men högersidan är en uppräknelig summa och därför antingen 0 eller ∞.

Vi måste säga att A_q:na inte är *mätbara*.

Det blir värre:

Banach-Tarski (1924): Enhetsbollen
$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ kan delas upp i ett ändligt antal bitar som kan roteras och translateras så att deras union efter detta bildar vilken mängd som helst! (om den har ett icketomt inre).

Robinson (1947): Det räcker med fem bitar (men inte med fyra)!

Den vanligaste formen av UA som man ser i matematisk bevisföring är Zorns lemma.

En mängd M kallas partiellt ordnad om det finns en relation $\leq$ som uppfyller (i) och (iii), men där det inte nödvändigtvis gäller att alla element $x, y \in M$ och är jämförbara, dvs vi kan ha att varken $x \leq y$ eller $y \leq x$ gäller.

Exempel: Låt U vara en mängd och $\mathcal{M}$ vara mängden av alla delmängder till U. Då kan vi låta $\leq$ vara $\subseteq$. Då blir $\leq$ en partiell ordning på $\mathcal{M}$.

En delmängd T av en partiellt ordnad mängd M kallas för *totalt ordnad* eller en *kedja* om det för alla $x, y \in T$ gäller antingen $x \leq y$ eller $y \leq x$.

En delmängd T av M är *begränsad* om det finns ett element $y \in M$ sådant att $x \leq y$ för alla $x \in T$.
Ett element $m \in M$ kallas *maximalt* om det inte finns något element $x \in M$ sådant att $m \leq x$.

Zorns lemma: En partiellt ordnad mängd där varje kedja är begränsad har minst ett maximalt element.

Zorns lemma är ekvivalent med UA. Beviset att UA $\Rightarrow$ ZL är lite långt och kräver lite mer exotiska definitioner, så vi hinner inte idag. Vi ska strax se att ZL $\Rightarrow$ UA.

En mängd M kallas välordnad om den är totalt ordnad och det för varje $\emptyset \neq A \subseteq M$ gäller att A har ett minsta element, dvs ett element $b \in A$ sådant att $b \leq a$ for alla $a \in A$.

Observera att t.ex. $\mathbb{R}$ inte är välordnad eftersom t.ex. ett öppet intervall inte har ett minsta element.

Välordningssatsen: Varje mängd M kan välordnas, dvs man kan införa en ordningsrelation $\leq$ på M sådan att M blir totalt ordnad och varje icketom delmängd får ett minsta element.

Bevis: Låt $\mathcal{A}$ vara mängden som består av alla element av typen $(E, \leq_E)$ där $E \subseteq M$ och $\leq_E$ är en välordning på E. (Notera att $\mathcal{A}$ innehåller mycket. Exempelvis kan ju alla uppräkneliga delmängder välordnas genom att räkna upp dem i godtycklig ordning.)

Inför en partiell ordning på $\mathcal{A}$ genom att säga att $(E, \leq_E) \leq (F, \leq_F)$ om $E \subseteq F$, $\leq_E$ och $\leq_F$ överensstämmer på E och $e \leq_F f$ for alla $f \in F \setminus E$ och alla $e \in E$.

Låt $\mathcal{T} = \{(E_i, \leq_{E_i}) : i \in I\}$ vara en kedja i $\mathcal{A}$, låt $E = \bigcup_i E_i$ och $x \leq_E y$ för $x, y \in E$ om $x \leq_{E_i} y$ for något i. Då är $\leq_E$ en välordning på E, och $(E, \leq_E)$ är alltså en begränsning till $\mathcal{T}$, ty om B är en icketom delmängd av E gäller för minst ett i att $B \cap E_i \neq \emptyset$, så $B \cap E_i$ har ett minsta element, vilket också är ett minsta element för hela B.

Enligt ZL finns ett maximalt element $(A, \leq_A)$. Om $A \neq M$ finns ett element $x \in M \setminus A$. Definiera nu en ordning på $A \cup \{x\}$ genom att ta $a \leq_{A\cup\{x\}} x$ for alla $a \in A$ och $\leq_{A\cup\{x\}}$ identisk med $\leq_A$ vid jämförelse mellan två element i A. Då är $A \cup \{x\}$ välordnad och $(A, \leq_A) < (A \cup \{x\}, \leq_{A\cup\{x\}})$. Därför är $(A, \leq_A)$ inte maximal, en motsägelse.

Det går alltså att välordna $\mathbb{R}$ genom att på något sätt ordna om talen. Detta är överraskande. Det betyder bland annat att det inte existerar några oändliga och strikt avtagande följder enligt denna ordning!

VOS $\Rightarrow$ UA: Låt A_i, $i \in I$ vara icketomma. Låt $A = \bigcup_i A_i$ och låt $\leq$ vara en välordning på A. Då har varje A_i ett minsta element a_i enligt denna välordning enl VOS. Men då gäller att

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i.$$