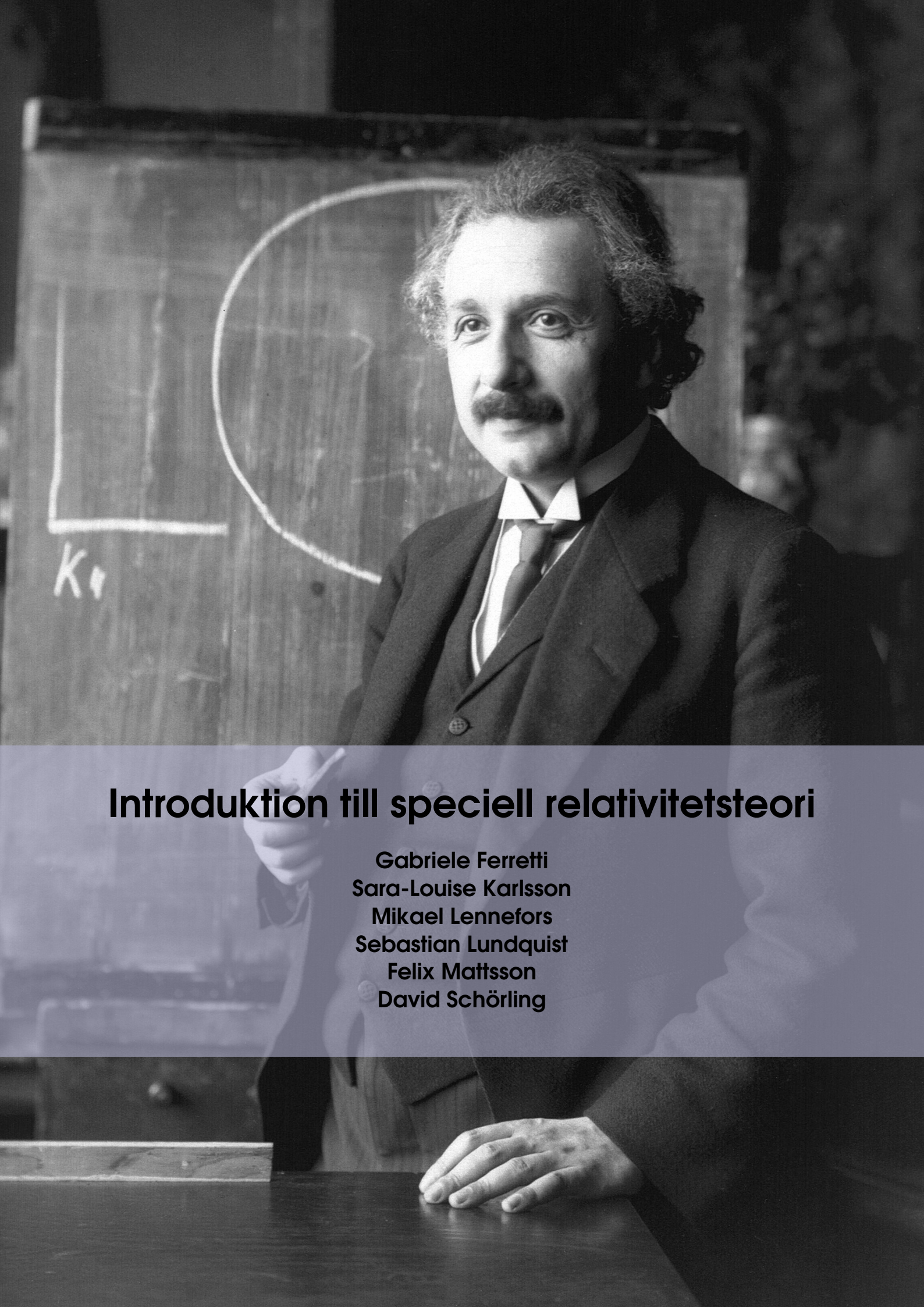
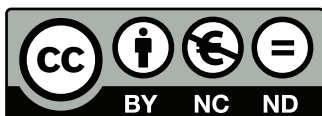




Introduktion till speciell relativitetsteori

Gabriele Ferretti
Sara-Louise Karlsson
Mikael Lennefors
Sebastian Lundquist
Felix Mattsson
David Schörling

Copyright © 2018 Gabriele Ferretti, Sara-Louise Karlsson, Mikael Lennefors, Sebastian Lundquist, Felix Mattsson, David Schörling



Detta verk är licensierad under en Creative Commons Erkännande-Ickekommersiell-IngaBearbetningar 4.0 Internationell license. För att ta del av en kopia av licensen besök följande <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Alla bilder är antingen egenproducerade eller licensierade under Creative Commons 0 <https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.sv>.

Institutionen för fysik
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg, Sweden

Skriven i L^AT_EX
Upplaga II, år 2019

Förord

Det här är ett kompendium som beskriver den speciella relativitetsteorin, utvecklad av Albert Einstein under tidigt 1900-tal. Kompendiet är menat att beskriva teorin på ett utförligt sätt och ha ett omfång som passar för en inledande kurs i ämnet på högskolenivå. Med detta sagt finns det mycket mer inom ämnet som inte tas upp i detta kompendium, och författarna hoppas förstås att inspirera läsaren till vidare studier inom ämnet.

Kompendiet är avsett för att fungera som kurslitteratur till kursen *Speciell relativitetsteori* som ges till fysikstudenter på Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet. Den är baserad på föreläsningsanteckningar från kursen under höstterminen 2017 och är författad av examinatorn i kursen tillsammans med fem tidigare studenter.

Kompendiet är uppdelat i nio kapitel där varje kapitel till största del består av teori, och avslutas med övningsuppgifter som behandlar teorin. Facit och lösningar till dessa hittar du på kurshemsidan.

Förkunskapskraven täcks väl av de kurser som studeras under de två inledande åren på fysikutbildningar vid tekniska högskolor och universitet. Förståelse för matematisk analys i en och flera variabler, linjär algebra, mekanik, vektoranalys och elektromagnetism är bra att ha.

Kompendiet finns tillgängligt gratis på kurshemsidan och på [Wikipediasidan om speciell relativitetsteori](#) och finns att köpa i tryckt form på www.cremona.se till utskriftspris. Påpekanden om tryckfel mottages tacksamt på kompendium.errata@gmail.com.

Vi författare vill passa på att tacka Måns Henningson, Elias Hölén Hannouch, Daniel Benjaminsson, Oskar Lindroos och Jakob Wadman som har lagt tiden på att korrekturläsa kompendiet och hjälpt oss att förbättra det. Vi vill också ge ett särskilt tack till Daniel Persson, som har bidragit några av övningsuppgifterna, och Lars Hellberg för lånet av en ypperlig HDMI-kabel, som vi ej skulle ha klarat våra möten utan.

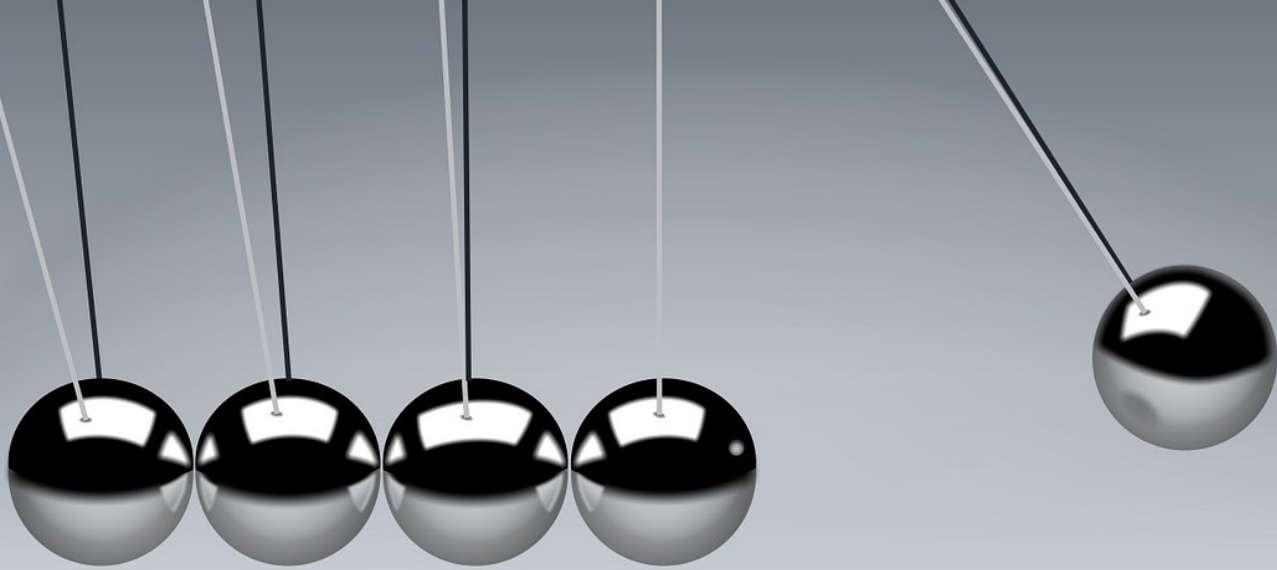
Kompendiet tillägnas alla de studenter som läser kursen.

Innehåll

1	Världen före speciell relativitetsteori	1
1.1	Mekanik	1
1.2	Elektromagnetism	3
1.3	Michelson-Morleys experiment	3
2	Grunderna	7
2.1	Einsteins postulat	7
2.2	Definition av tid och längd i ett inertialsystem	8
2.3	Samtidighet	8
2.4	Lorentztransformationen	10
2.5	Minkowskidiagram	12
2.6	Intervall mellan två händelser	13
2.7	Övningsuppgifter	14
3	De första resultaten	15
3.1	Längdkontraktion	15
3.2	Staven och garaget	16
3.3	Tidsdilatation	18
3.4	Tvillingparadoxen	19
3.5	Övningsuppgifter	20
4	Kinematik	21
4.1	Hastighetsaddition	21
4.2	Rapiditet	22
4.3	Accelerationsaddition	23
4.4	Momentant vilosystem	24
4.5	Egentid	24
4.6	Egenacceleration	25
4.7	Rätlinjig rörelse med konstant egenacceleration	25
4.8	Övningsuppgifter	27
5	Optik	29
5.1	Fizeaus experiment	29
5.2	Dopplereffekten	31
5.2.1	Dopplereffekten för rörlig källa	31
5.2.2	Dopplereffekten för rörlig observatör	32
5.3	Aberration	33
5.3.1	Aberration av ljus	33
5.3.2	Dopplerfaktorn, strålkastareffekten och Luminositet	34
5.3.3	Aberration av partiklar och vågor	35

5.4	Övningsuppgifter	36
6	4-dimensionell notation	39
6.1	Skalärer, vektorer och tensorer i Euklidiskt 3D-rum	39
6.2	Enheter $c=1$	41
6.3	Skalärer, vektorer och tensorer i Minkowski 4D-rumtid	41
6.4	Intervall mellan två händelser	42
6.5	Lorentzprodukt, tidslika, ljuslika och rumslika vektorer	43
6.6	4-hastigheten	46
6.7	4-accelerationen	47
6.7.1	Egenaccelerationen	48
6.8	4-vågvektorn	49
6.9	Lorentzinvarians vid problemlösning	50
6.10	Övningsuppgifter	51
7	Dynamik	53
7.1	Konsivering av 4-rörelsemängd	53
7.2	Den gamla notationen "relativistisk massa"	54
7.3	Energi	55
7.4	Mass-skäl-relationen	56
7.5	Elastiska kollisioner	56
7.6	Masscentrums inertialsystem	57
7.7	Relativistisk "biljard"	58
7.8	Partikelsönderfall	60
7.9	Tröskelenergi	61
7.10	Mandelstamvariabler	63
7.11	Comptoneffekten	64
7.12	Den relativistiska raketekvationen	66
7.12.1	Det klassiska fallet	66
7.12.2	Det relativistiska fallet	66
7.13	4-kraften	68
7.14	Övningsuppgifter	68
8	Elektromagnetism	71
8.1	Skälär-, vektor- och tensorfält	71
8.2	Lorentzkraften	72
8.3	Kontinuitetsekvationen	74
8.4	Maxwells ekvationer	75
8.5	Gaugepotentialen	77
8.6	Strålning från rörlig laddning (Lienard-Wiechert) med Greensfunktioner	79
8.7	Minsta verkans princip	80
8.7.1	Icke-relativistisk partikel i ett endimensionellt potentialfält	81

8.7.2	Minsta verkans princip inom elektromagnetism	83
8.8	Stressenergiteatern	84
8.8.1	Energibevarande för en icke-relativistisk partikel i ett potentialfält	84
8.8.2	Elektromagnetism och stressenergiteatern	86
8.9	Effektörlust för en accelererande, laddad partikel	88
8.10	Övningsuppgifter	89
9	Världen efter speciell relativitetsteori	91
9.1	Kvantmekanik + speciell relativitetsteori = kvantfältteori	91
9.2	Gravitation + speciell relativitetsteori = allmänna relativitetsteori	92
9.3	Framtiden	92
	Ordlista	93
	Sakregister	95



1. Världen före speciell relativitetsteori

Fysiken fram till slutet av 1800-talet bestod i stort sett av mekanik, elektrodynamik och termodynamik, vilket ibland kallas för den klassiska fysiken. I detta inledande kapitel kommer några begrepp inom den klassiska fysiken kort presenteras. Framförallt kommer fokus att läggas på förhållandet mellan mekanik och elektrodynamik, samt hur fysiker, innan Albert Einstein (1879-1955) presenterade den *speciella relativitetsteorin*, försökte hantera beskrivningar av ljusets rörelse och händelser i olika referenssystem. Begreppen som diskuteras är bland annat *Newtons tre lagar*, *Galileitransformationen*, *Maxwells ekvationer*, *Michelson-Morleys experiment* och *ljusets hastighet*.

1.1 Mekanik

Inom den Newtonska mekaniken gäller Isaac Newtons (1643-1727, n.s.) tre lagar.

1.1.1 — Tröghetslagen. Fria partiklar, där vektorsumman av alla yttre verkande krafter är noll, rör sig med konstant vektorhastighet: $\sum \mathbb{F} = \mathbb{0} \iff \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbb{0}$.

1.1.2 — Accelerationslagen. Vektorkraften på en partikel har samma riktning och storlek som produkten av dess massa och acceleration: $\mathbb{F} = m\mathbf{a}$.

1.1.3 — Lagen om verkan och motverkan. Krafterna för verkan och motverkan är lika och motriktade. Om en kropp A påverkar en kropp B med en kraft $\mathbb{F}$, påverkar B kropp A med en kraft $-\mathbb{F}$.

Fysikaliska lagar som beskriver kroppars rörelser relativt varandra råder i någon typ av referenssystem. Ett klassiskt referenssystem kan ses som en tänkt förlängning av en solid kropp. Det beskriver positioner i rummet som är låsta eller i vila relativt varandra. Man behöver också ange tiden för att kunna specificera när en viss händelse sker eller för att kunna beskriva rörelsen.

Newton ansåg att både tid och rum var absoluta samt att det fanns ett referenssystem som var "bättre" än alla andra, vilket var i vila relativt solsystemets masscentrum. Newton kallade det för

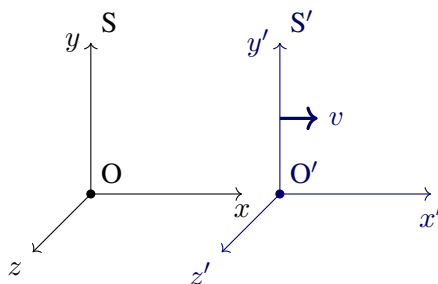
Guds sensoriska organ, i vilket Gud kunde känna världen. Detta var det *absoluta rummet*, som saknade inverkan av fiktiva krafter där Newtons lagar gällde och vars klocka alltid tickade med konstant takt. Det var alltså fundamentet för den Newtonska mekaniken. Tiden flödar i samma takt överallt. Alla andra referenssystem fångar bara upp denna världsklocka och fortsätter ticka, med enbart friheten av val till enheter och startpunkt.

Men det finns också andra referenssystem som är "lika bra" som det absoluta rummet när det gäller Newtons lagar. Mer exakt definierar vi ett *inertialsystem*:

Definition 1.1.1 — Inertialsystem. Ett inertialsystem är ett system där Newtons tröghetslag 1.1.1 gäller.

Ett inertialsystem är alltså ett system där det ej finns några fiktiva krafter. Vi visar nu att ett inertialsystem är ett system som rör sig med konstant hastighet relativt det absoluta rummet och att 1.1.2 samt 1.1.3 också gäller i det.

Låt oss först tydliggöra förhållandet mellan två referenssystem: Vi säger att två referenssystem, S och S', befinner sig i *standardkonfiguration* när S' rör sig med en konstant hastighet v i x -riktningen relativt S. Vanliga *kartesiska* koordinater samt en tidskoordinat används, koordinaterna i S betecknas med x, y, z och t medan koordinaterna i S' betecknas med x', y', z' och t' . Båda system börjar vid $t = 0$ och $t' = 0$, med origo för respektive system, O och O', i samma punkt. Axlarna är orienterade enligt Figur 1.1. I standardkonfigurationen är axlarna parallella och har samma riktningar för båda system. Standardkonfigurationen räcker för att bevisa de flesta resultaten inom Newtonsk mekanik eller Speciell relativitetsteori, då alla andra typer av konfigurationer fås med hjälp av rotation och förflyttning av origo.



Figur 1.1: Inertialsystemen S och S' i standardkonfiguration. S' rör sig med konstant hastighet v relativt S i positiv x -riktning. De har ingen förskjutning i y - eller z -led och har en tid t och t' anknutna till respektive system, valda så att vid $t = t' = 0$ gäller $O \equiv O'$.

En händelse kan beskrivas i båda systemen genom att utföra en koordinattransformation mellan dem. Eftersom S' bara rör sig i x -led relativt S, fås följande transformation mellan systemen, kallat *Galileitransformationen*.

1.1.4 — Galileitransformationen. Transformationen av position, hastighet och acceleration från S till S'.

$$\begin{array}{llll}
 x' = x - vt & \implies & u'_x = u_x - v & \implies & a'_x = a_x \\
 y' = y & \implies & u'_y = u_y & \implies & a'_y = a_y \\
 z' = z & \implies & u'_z = u_z & \implies & a'_z = a_z \\
 t' = t. & & & &
 \end{array} \tag{1.1}$$

Notera först att accelerationerna är invarianta mellan systemen, det vill säga $a = a'$. (Det kan man

enkelt bevisa genom att ta två tidsderivator på $x' = x - vt$.)

Notera också att krafterna mellan två partiklar i läge $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$ bara beror på $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ och är då invarianta under (1.1), dvs $\mathbb{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbb{F}(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)$.

Det enda som krävs för att alla Newtons tre lagar ska vara invarianta i alla inertialsystem är invarians hos alla massor, $m = m'$, som då måste betraktas som ett ytterligare postulat som måste testas experimentellt.

För alla krafter mellan partiklar gäller då att accelerationslagen $\mathbb{F} = m\mathbf{a}$ är uppfylld, inte bara i det absoluta rummet, men även i alla inertialsystem som står i förhållande (1.1) med det absoluta rummet. Detta kallas den *Newtonska relativiteten*. Innan Einsteins relativitetsteori var det oklart om denna ekvivalens gällde all fysik eller bara mekanik.

1.2 Elektromagnetism

En annan huvuddel av den klassiska fysiken är *Elektromagnetismen*, som främst förknippas med James Clerk Maxwell (1831-1879).

1.2.1 — Maxwells ekvationer i vakuum & Lorentzkraft.

$\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho$	Gauss lag
$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$	Gauss lag för magnetism
$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$	Faradays induktionslag
$\nabla \times \mathbb{B} = \frac{1}{c} \mathbb{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$	Ampères lag med Maxwells korrektionsterm
$\mathbb{F} = q \left(\mathbb{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbb{B} \right)$	Lorentzkraften

Här har vi att $\mathbb{E}$ är elektriskt fält, $\mathbb{B}$ är magnetisk flödestäthet, $\mathbb{J}$ är strömtäthet och $\mathbf{u}$ är laddningshastighet. Observera att ekvationerna är i *Lorentz-Heaviside-enheter* som ofta används inom relativistisk elektrodynamik. I vakuum gäller därmed $\mathbb{E} = \mathbb{D}$ och $\mathbb{H} = \mathbb{B}$ där $\mathbb{D}$ och $\mathbb{H}$ är elektriska flödestätheten respektive magnetfältet och ϵ_0 , μ_0 har normerats till 1.

Konstanten $c = 299792458 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ beskriver ljusets hastighet i vakuum och Maxwells ekvationer visar att ljus är en elektromagnetisk våg.

De enda kända vågfenomenen på 1800-talet var materiella vågor och det var länge ett mysterium om ljus krävde något medium att propagera genom, så som ljud behöver luft. Ett förslag på propagationsmedium var något som kallades *eter*, i vilket ljuset skulle vara en propagerande våg. Detta var en mystisk materia med konstiga egenskaper och Maxwells ekvationer tycktes bara gälla i inertialsystem i vila med etern som oftast förknippades med det absoluta rummet. Alltså, till skillnad från Newtons mekanik, spelade det stor roll när man betraktade elektromagnetiska fenomen om man befann sig i vila relativ eter eller rörde sig med konstant hastighet. Man kan lätt kontrollera att 1.2.1 inte är invarianta under (1.1).

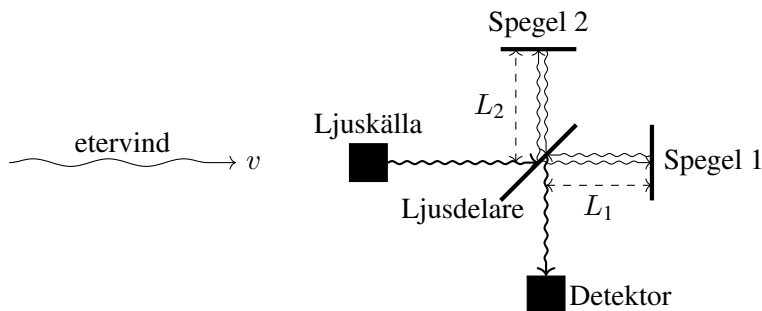
1.3 Michelson-Morleys experiment

Om etern verkligen fanns, ansågs att man kunde röra sig genom den, exempelvis när jorden färdas runt solen. Ur jordens synvinkel kunde detta tolkas som att etern hade en hastighet.

Denna hastighet, eller *etervind*, skulle höja eller sänka ljushastigheten beroende på vilken riktning den hade relativt ljuset. Detta skulle innebära att jorden upplevde denna etervind olika beroende på vilken position den hade i sin bana runt solen. För att undersöka om så var fallet utförde *Albert*

A. Michelson (1852-1931) och Edward Morley (1838-1923) 1887 ett interferometerexperiment, där det antogs att en etervind existerade.

Experimentet byggde på att ljuset från en källa propagerade mot en ljusdelare som delade upp ljuset i riktning mot två olika speglar, som var vinkelräta mot varandra. När ljuset från de olika speglarna sedan reflekterades tillbaka mot en detektor kunde de interferera på olika sätt beroende på läge relativt eterns läge. Experimentuppställningen illustreras i Figur 1.2.

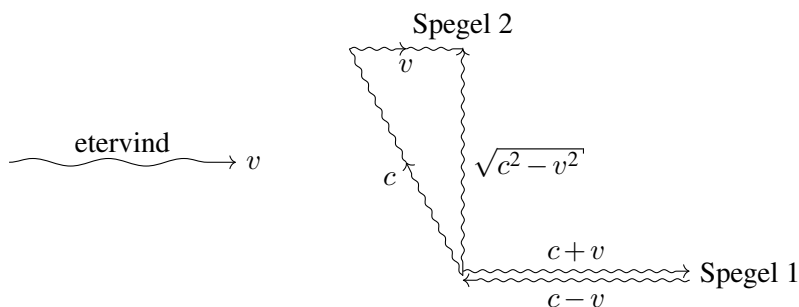


Figur 1.2: Visualisering av Michelson-Morleys experiment. En ljusstråle delas i en ljusdelare. De två uppdelade strålarna reflekteras sedan i speglar på avstånd L_1 respektive L_2 från ljusdelaren. Det reflekterade ljuset åker sedan tillbaka till ljusdelaren och in i en detektor där de interfererar.

Om vi, för enkelhetens skull, tänker oss att den ena ljusstrålen propagerade parallellt med etervinden v längs arm 1, skulle ljuset på väg mot spegeln ha hastigheten $c + v$ och på tillbakavägen $c - v$. Den totala tiden blir då

$$t_1 = \frac{L_1}{c+v} + \frac{L_1}{c-v} = \frac{2L_1c}{c^2 - v^2} = \frac{2L_1/c}{1 - v^2/c^2}. \quad (1.2)$$

Det är möjligt att konstruera en hastighetstriangel för att erhålla tiden det skulle ta att åka den totala sträckan $2L_2$ för ljuset som färdades ortogonalt mot etervinden, se Figur 1.3.



Figur 1.3: Visualisering av ljushastigheten längs armarna i Michelson-Morleys interferometer, förutsatt att etervinden existerar. Ljuset som färdas parallellt med etern håller hastigheten $c + v$ respektive $c - v$ på vägen till, respektive från, ljusdelaren. Ljuset som färdas ortogonalt mot etern har hela tiden farten c , men etervinden trycker ljuset åt höger med hastigheten v . Detta gör att ljusets riktning behöver korrigeras och dess hastighet längs interferometerarmen är därför $\sqrt{c^2 - v^2}$ enligt Pythagoras sats.

Under inverkan av etervinden skulle alltså ljuset hålla hastigheten $\sqrt{c^2 - v^2}$ åt båda håll längs arm 2 av interferometerarmen, enligt hastighetstriangeln i Figur 1.3. Den totala tiden blir därför

$$t_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.3)$$

Eftersom jordens hastighet kring solen, $v = 29,8 \text{ km/s}$, är mycket mindre än c kan en Taylorutveckling göras för att uppskatta skillnaden mellan tiderna, Δt . Under antagandet att interferometerarmarna var lika långa, $L_1 = L_2 = L$, gäller då att

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c} \left[1 + \frac{v^2}{c^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{v^4}{c^4} \right) \right] \approx \frac{Lv^2}{c^3} > 0.$$

Experimentellt är det omöjligt att få interferometerarmarna att bli lika långa, $L_1 = L_2 = L$. Detta innebär att det alltid kommer uppstå ett statiskt interferensmönster eftersom ljuset aldrig kommer färdas lika långt. För att komma runt detta problem byggdes experimentuppställningen på en roterande platta. Om etervinden existerade hade rotationen gett upphov till ett rörligt interferensmönster eftersom vinkeln ljuset haft mot vinden kontinuerligt skulle förändras och således även gångvägen.

För $L \approx 10 \text{ m}$ skulle tidsskillnaden uppmätas till $\Delta t \approx 3 \cdot 10^{-16} \text{ s}$ som är mindre än perioden av synligt ljus. ($L \approx 10$ åstadkoms genom multipla reflektioner.) Då skulle jordens rörelse genom etern upptäckas, men vid experimentet kunde inte någon tidsskillnad observeras. Experimentet upprepades sex månader senare i fall etervinden råkade vara noll i det första försöket för att kanske solen färdades genom etern. Men inte heller då observerades någon tidsskillnad.

Många försökte förklara varför det inte observerades någon tidsskillnad, några av dessa förslag var följande.

1. Jorden kanske "drog med sig" etern och därmed även påverkade etervinden. Dock kunde denna hypotes uteslutas, eftersom det skulle innebära optiska effekter på ljuset från stjärnorna.
2. Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) föreslog att sträckan i apparaten som färdades mot etervinden blev kortare och att denna kontraktion kunde förklara varför tiderna var lika. Kontraktionen fås genom att sätta uttrycken för tiderna i Ekvation (1.2) och (1.3) lika och lösa ut den ena längden uttryckt i den andra enligt

$$\frac{2L_1/c}{1 - v^2/c^2} = \frac{2L_2/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \implies L_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2} L_2.$$

Lorentz förslag skulle visa sig ge rätt resultat, men av fel anledning. Det var nämligen inte etern som var grunden till detta resultat, utan något annat. I nästkommande kapitel ska vi se Einsteins förklaring på det hela.



2. Grunderna

Av de många fysiker som försökte förklara bland annat resultatet i Michelson-Morleys experiment, blev det Albert Einstein som lyckades lägga fram ett framgångsrikt förslag som skulle visa sig leda till slutet för eter teorierna och det absoluta rummet. Den speciella relativitetsteorin skulle bli ett av de första stegen in i den *moderna fysiken*.

I detta kapitel presenteras först Einsteins postulat och vad de hade för påverkan på den klassiska fysiken. Därefter kommer nya definitioner av längd och tid att ges, för att kunna hantera övergångar mellan olika inertialsystem. Dessa övergångar utförs genom *Lorentztransformationen*, som inom den speciella relativitetsteorin ersätter Galileitransformationen (1.1) i förra kapiteln. Dessutom introduceras nya begrepp som *samtidighet*, *Minkowskidiagram* och definitionen av *intervall mellan två händelser*.

2.1 Einsteins postulat

Den 26 september 1905 publicerade Albert Einstein ett mycket radikalt förslag. Under antagandet att det inte fanns någon eter formulerade han i sin publikation *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* följande.

2.1.1 — Einsteins postulat.

1. Alla fysiklagar är samma i alla inertialsystem.
2. Ljushastigheten i vakuum är alltid c i alla inertialsystem.

Det första postulatet kanske inte känns så förvånande eftersom det även gäller i klassisk fysik att mekaniken är oberoende av vilket inertialsystem man uttrycker det i. Det som är nytt här är att även ekvationer för elektrodynamiken, optik o.s.v. påstås vara samma i alla inertialsystem. Det andra postulatet strider uppenbarligen mot det klassiska synsättet på tid och rum. Det säger att oavsett vilket inertialsystem man befinner sig i är ljusets hastighet densamma. Einsteins stora bedrift låg i att ändra det gamla synsättet på tid och rum som gör att postulaten fortfarande uppfylls.

Det är klart att om Galilietransformation (1.1) gäller, måste ett objekt som har hastighet $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ i S röra sig med hastighet $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = u - v$ i S' . Om $v \neq 0$ kan det alltså inte vara möjligt att

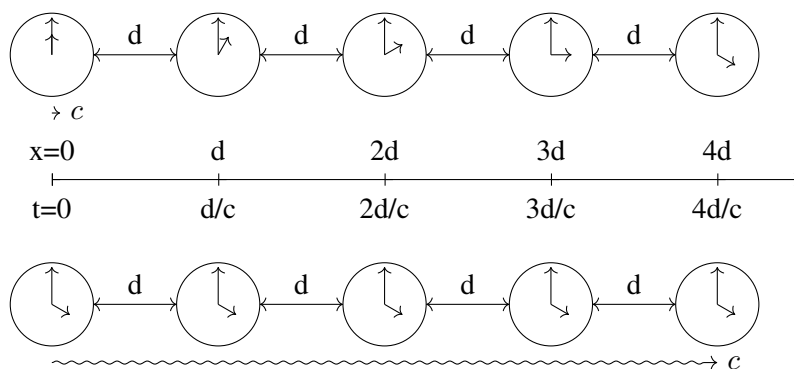
$u = u' = c$. Om 2.1.1 gäller, måste (1.1) falla!

Istället för att relatera olika inertialsystem via Galileitransformationen enligt Ekvation (1.1), görs det med den så kallade Lorentztransformationen. Eftersom ljushastigheten inte ändras mellan två inertialsystem ändras istället synen som inertialsystemen har på varandra. En tid eller längd behöver inte vara identiska i båda inertialsystemen. Varje gång man mäter ett objekts hastighet, längd eller hur det upplever tid, sker det i relation till inertialsystemet som mätningen sker i. Det krävs alltså ett nytt koncept för *relativ tid* som inte skiljer sig från den gamla vyn inom varje inertialsystem, men som ändras vid övergång mellan olika system. Detta beskrivs mer detaljerat i Kapitel 2.2 och 2.4.

2.2 Definition av tid och längd i ett inertialsystem

I detta avsnitt beskriver vi konkret hur man definierar längd och tid i ett inertialsystem. Vi kan välja ett origo O och koncentrera oss på x -riktningen, alla andra riktningar kan behandlas på samma sätt. Längder definieras precis som tidigare genom att välja ett antal lämpliga "pinnar" av längd d som är i vila relativt O .

För att definiera tiden använder vi många klockor som kan startas med en ljussignal. Klockorna ställs vid punkt $0, d, 2d, 3d, \dots$ och tiden de visar innan de startat är $0, d/c, 2d/c, 3d/c, \dots$. När klockorna väl startas genom att skicka iväg en ljussignal från O mot dessa, definierar de tiden i vårt system. För att ta reda på x och t av en händelse avläser man alltså den närmaste längdmarkering och klocka. Konstruktionen illustreras i Figur 2.1. I ett annat referenssystem S' skulle vi i stället använda samma typ av pinnar och klockor men nu i vila relativt S' och därmed definiera nya koordinater x' och t' på det sättet.



Figur 2.1: Klockorna startas genom att skicka iväg en ljussignal från O mot dessa vilka då definierar tiden i vårt system. Den övre halvan av figuren visar klockorna innan ljussignalen skickas ut och den undre halvan av figuren visar klockorna efter att ljussignalen har satt igång dem alla. För att ta reda på x och t av en händelse avläser man alltså den närmaste längdmarkeringen och klockan.

Hur övergångar mellan olika inertialsystem faktiskt sker kan härledas med hjälp av Einsteins postulat och kallas för Lorentztransformationen. Detta beskrivs i Kapitel 2.4. Speciell relativitetsteori beskriver därmed Lorentzinvariant fysik, medan Newtons klassiska fysik beskriver Galilei-invariant fysik. Innan vi gör det, låt oss, som uppvärmning, snabbt titta på samtidigthetsbegreppet i olika referenssystem.

2.3 Samtidighet

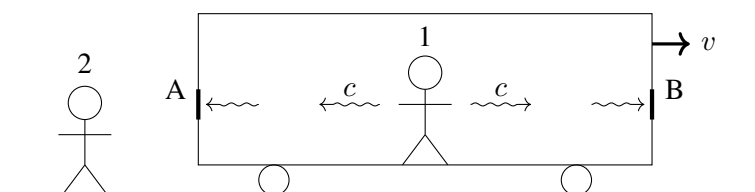
I vår vardag är vi vana vid att händelser som är samtidigt för en person även är samtidigt för en annan person. Det fungerar eftersom vi rör oss med hastigheter som är mycket mindre än c ,

i förhållande till varandra. Vid högre hastigheter, närmare c , blir det däremot annorlunda enligt Einsteins postulat. Eftersom tiden inte längre är identisk för olika observatörers händelser, som är samtidiga för en observatör i sitt inertialsystem, behöver de inte vara samtidiga i en annan observatörs inertialsystem.

OBS! Notera att när vi här pratar om att två händelser, A och B, är samtidiga menar vi att tidskoordinaterna t_A och t_B då händelserna sker, är lika, $t_A = t_B$, i ett visst inertialsystem. Vi bortser alltså från den extra tid som det tar för ljuset att nå observatörens ögon. Det är viktigt att skilja på dessa två begrepp, att händelser är samtidiga eller att en observatör ser dem samtidigt, eftersom missuppfattning kan leda till paradoxala resultat.

För att belysa att händelser inte är samtidiga i olika inertialsystem betraktas ett exempel med två observatörer, enligt Figur 2.2. En person (observatör 1) står mitt i ett tåg och skjuter vid en tidpunkt iväg två ljusstrålar, en åt vänster och en åt höger, med hjälp av två laserpistoler, som en stormtrooper från Star Wars. Tåget rör sig med konstant hastighet v åt höger relativt en observatör som står stilla utanför tåget (observatör 2). Ljusstrålarna har enligt Einsteins postulat hastigheten c i båda observatörernas inertialsystem. Vi kan beteckna händelsen att ljusstrålen som skickas iväg åt vänster når tågets bakre ände med A och händelsen att ljusstrålen som skickas åt höger når tågets främre ände med B.

Ur observatör 1's perspektiv kommer det naturligtvis se ut som att A och B inträffar samtidigt. Observatör 1 rör sig med tåget och båda ljusstrålarna rör sig med lika stor hastighet c , samt har de lika långa sträckor till tågets ändar. För observatör 2 ser det däremot annorlunda ut. Efter att ljusstrålarna skjuts iväg och innan de når tågets ändar hinner tåget röra sig en sträcka åt höger. Sträckan som höger ljusstråle måste röra sig mot tågets högra ände blir längre än sträckan som vänster ljusstråle måste röra sig mot tågets vänstra ände. Eftersom ljusstrålarna fortfarande rör sig med ljusets hastighet når vänster ljusstråle tågets bakre ände först, i observatör 2's inertialsystem. A inträffar alltså innan B enligt klockorna som är i vila relativt 2 och är synkroniserade som i 2.2. Händelser som är samtidiga för observatör 1 är alltså inte samtidiga för observatör 2.



Figur 2.2: Observatör 1 står i ett tåg och skickar vid en tidpunkt iväg två ljusstrålar åt var sitt håll från tågets mitt. Observatör 2 står utanför tåget och ser att det rör sig med en hastighet v åt höger relativt observatör 2. Händelsen att vänster ljusstråle når tågets bakre ände är markerad som A och händelsen att höger ljusstråle når tågets främre ände är markerad som B. Vanligtvis skulle man tänka sig att händelserna A och B sker samtidigt i båda observatörernas inertialsystem, men enligt Einsteins postulat kan de ske samtidigt i ett inertialsystem utan att behöva vara samtidiga i ett annat.

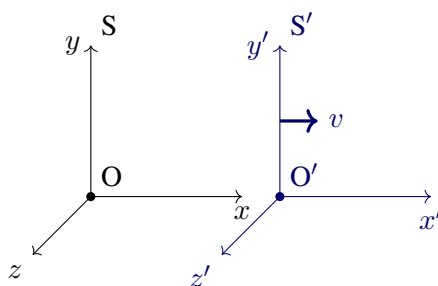
Om det dessutom skulle finnas en tredje observatör med i exemplet, som rör sig snabbare än tåget åt höger, skulle det se annorlunda ut även i denna persons inertialsystem. För denna observatör ser det ut som att tåget hinner röra sig en bit åt vänster under tiden strålarna skjuts iväg och att de träffar tågets ändar. Ljusstrålarna rör sig fortfarande med ljusets hastighet, så i detta inertialsystem inträffar B innan A.

Händelser som är samtidiga i ett inertialsystem är inte samtidiga i ett inertialsystem som rör sig relativt det första systemet, samtidighet är alltså relativ. Detta fenomen är dock inte märkbart i vardagen då vi vanligtvis rör oss med hastigheter relativt varandra som är mycket mindre än

ljusets. Om ljuset istället skulle röra sig som Newton förutsåg skulle ljusstrålarnas hastigheter enligt observatör 2 vara $c \pm v$ och händelserna A och B skulle då vara samtidiga även för observatör 2. Även i observatör 3's inertialsystem skulle händelserna bli samtidiga. Enligt Newtonsk mekanik är alltså samtidighet inte relativ.

2.4 Lorentztransformationen

Lorentztransformationen är en av de viktigaste grundstenarna i speciell relativitetsteori och är de ekvationer som beskriver hur man tar sig från ett inertialsystem till ett annat. Här utgår vi från två inertialsystem S och S' i standardkonfiguration, men Lorentztransformationen kan också skrivas allmänt mellan två godtyckliga inertialsystem. Inertialsystemen S och S' i standardkonfiguration visas i Figur 2.3, där S' rör sig med en konstant hastighet v i x -riktningen relativt S. Vanliga kartesiska koordinater används, samt en tidskoordinat, så att koordinaterna i S betecknas med x , y , z och t , och koordinaterna i S' betecknas med x' , y' , z' och t' . Notera att O har alltid koordinaterna $x = y = z = 0$ samt O' har koordinaterna $x' = y' = z' = 0$.



Figur 2.3: Två inertialsystem S och S' som befinner sig i standardkonfiguration, då S' rör sig med konstant hastighet v relativt S i x -riktningen. Koordinaterna för S är betecknade med x , y , z och t , samt origo med O. Koordinaterna för S' är x' , y' , z' och t' , samt origo O'.

Eftersom S' endast rör sig i x -riktningen blir sambandet mellan y och y' samt mellan z och z' trivialt, nämligen $y = y'$ och $z = z'$. Det kan bevisas genom att tänka såhär: vi lägger två identiska pinnar längs y respektive y' med en ände i O respektive O'. Pinnarna har en spik som sticker ut åt den andra änden. När y och y' axlarna träffar varandra, om en pinne råkar vara kortare än den andra (d.v.s. $y \neq y'$), lämnar den ena en skråma på den andre. Men detta är omöjligt, ty om vi jämförde pinnar efter experimentet skulle vi kunna urskilja ett inertialsystem från det andra. Notera att detta tankeexperiment inte kan göras om pinnarna ligger längs x och x' .

För att ta fram sambandet mellan x , t , x' och t' kan vi börja med att konstatera att det ska vara linjärt, för att inverstransformationen ska vara av samma typ. Vi skriver $x' = \gamma x + \alpha t + \delta$, där γ , α och δ är reella konstanter. δ kan bestämmas från villkoret att $x = x' = 0$ vid $t = 0$, vilket ger att $\delta = 0$. Dessutom kan man efter en tid t skriva koordinaten för O' som $x' = 0$ i S' och $x = vt$ i S, detta ger att $\alpha = -\gamma v$. Nu kan man därför skriva

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.1)$$

med endast γ som återstår att bestämma.

Genom att titta noggrannare på standardkonfigurationen inser vi att om man skulle byta riktning på v byter också koordinaterna i S och S' roller. Man kan alltså lätt få ekvationerna för koordinaterna i S bara genom att byta tecken på v och byta vilka koordinater som är "primade" och inte i ekvationerna för koordinaterna i S'. Symmetrin ger att man alltså också kan skriva

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (2.2)$$

Det gäller också att ljusets hastighet måste vara c i både S och S' . Vi kan alltså skriva $x = ct$ och $x' = ct'$ för att beskriva positionen av en ljusfront i både S och S' som skickas ut vid $t = t' = 0$ då $O \equiv O'$. Sätts detta in i Ekvation (2.1) och (2.2) erhålls ekvationerna

$$ct' = \gamma(c - v)t \quad \text{och} \quad ct = \gamma(c + v)t'$$

som måste ha en lösning för alla t . Det betyder att γ måste bero på v på följande sätt.

2.4.1 — Gammafaktorn / Lorentzfaktorn.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.3)$$

γ kallas för *gammafaktorn* eller *Lorentzfaktorn*. Det gäller att $\gamma \geq 1$ och att γ växer monotont med v .

I Newtonsk mekanik skulle man istället sätta $t = t'$ i Ekvation (2.1) och (2.2) vilket skulle ge $\gamma = 1$, som också erhålls genom att ta gränsen $c \rightarrow \infty$ i Ekvation (2.3).

OBS!

Notera att Lorentzfaktorn blir oändlig om $v = c$ och imaginär om $v > c$, vilket skulle ge oändliga eller imaginära uttryck för t' och x' . Fysikaliskt sett är detta befängt, alltså kan vi dra slutsatsen att den maximala hastigheten som två inertialsystem kan färdas relativt varandra alltid är mindre än c .

För att få ekvationen för t' sätts Ekvation (2.1) in i Ekvation (2.2) vilket ger

$$t' = \gamma \left(t - xv/c^2 \right).$$

Ekvationerna för Lorentztransformationen i standardkonfiguration är alltså följande.

2.4.2 — Lorentztransformationen.

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma \left(t - xv/c^2 \right). \quad (2.4)$$

Den inversa transformationen fås enkelt genom att byta ut v mot $-v$ samt byta plats på "primade" och "oprimade" koordinater i uttrycken ovan.

2.4.3 — Inversa Lorentztransformationen.

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left(t' + x'v/c^2 \right). \quad (2.5)$$

■ **Exempel 2.1** Studera ett problem i en rumsdimension x , där en händelse inträffar vid $t = 3 \text{ meter}/c$ och $x = 5 \text{ meter}$ i inertialsystemet S . Man kan då fråga sig vad ett inertialsystem S' i standardkonfiguration med S ska ha för hastighet för att händelsen där ska inträffa vid $t' = 0$.

Vi har alltså givna värden på t , x och t' medan v är okänd. Uttrycket för t' i Ekvation (2.4),

$$t' = \gamma \left(t - xv/c^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(t - xv/c^2 \right),$$

innehåller de fyra variablerna. Vi sätter nu $t' = 0$ och får

$$t - \frac{xv}{c^2} = 0$$

eftersom Lorentzfaktorn är nollskild för alla v . Vi löser nu ut v och stoppar in givna värden.

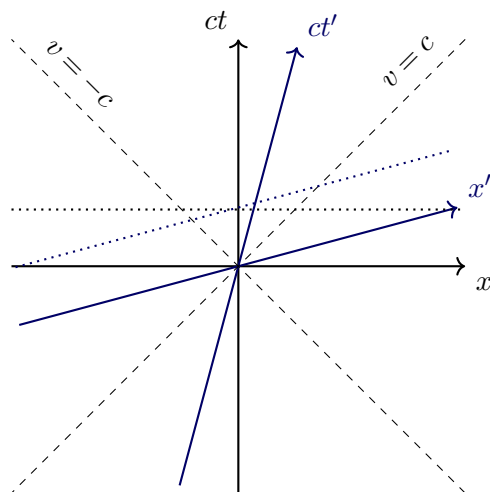
$$v = \frac{tc^2}{x} = \left\{ t = \frac{3\text{ m}}{c} \quad \text{och} \quad x = 5\text{ m} \right\} = \frac{(3\text{ m}/c) c^2}{5\text{ m}} = \frac{3c}{5}$$

■

2.5 Minkowskidiagram

Minkowskidiagram, som också kallas *rumtidsdiagram*, är diagram över rumtiden som kan användas för att illustrera egenskaper hos rum och tid. Dessa har ofta en rumskoordinat x på den horisontella axeln och en tidskoordinat skalad med ljusets hastighet ct på den vertikala axeln, där dessa axlar hör till ett inertialsystem S . Alla punkter i ett sådant diagram motsvarar händelser som sker vid tiden t och läget x , med koordinater ct och x . Vi kan också beskriva samma händelser, samma punkter, i systemet S' med koordinater ct' och x' . Axlarna för S' , som är i standardkonfiguration med S , får vi från Lorentztransformationen, Ekvation (2.4) och (2.5). Ekvationen för x' -axeln fås genom att sätta $t' = 0$ vilket ger $ct = vx/c$ (eller $x = c^2t/v$), och ekvationen för ct' -axeln får vi genom att sätta $x' = 0$, vilket ger $x = vt$ (eller $ct = cx/v$).

En kurva i ett Minkowskidiagram där x -koordinaten kan skrivas som en funktion av tidskoordinaten, $x = f(ct)$, där f är en kontinuerlig och envärd funktion, kallas för en *världslinje*. Världslinjer beskriver hur föremål rör sig i rumtiden. För föremål som rör sig med v relativt S ser vi att ct' -axeln beskrivs med $x = vt$ (eller $ct = cx/v$) så vi kan skriva deras lutning mot ct -axeln som $dx/dct = v/c$. Världslinjen för föremål som rör sig med v relativt S har därför en lutning mot ct -axeln som ges av deras hastighet relativt S dividerat med c . Speciellt för föremål som rör sig med $v = \pm c$ blir världslinjerna räta linjer med lutningen $dx/dct = \pm 1$, det vill säga med 45 graders vinkel mot axlarna i S . Detta gäller i alla inertialsystem och är en konsekvens av Einsteins postulat att ljusets hastighet i vakuum är c i alla inertialsystem. Världslinjerna för föremål som rör sig med $v = \pm c$ är de streckade linjerna i Figur 2.4. Eftersom inga föremål kan röra sig snabbare än ljuset får vi därför också fram att deras världslinjer inte kan luta mer än 45 grader från ct -axeln.



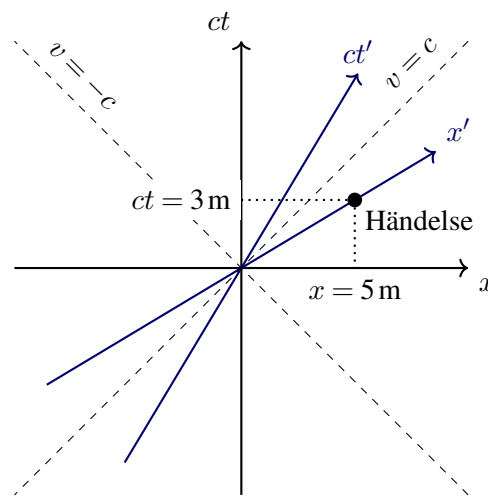
Figur 2.4: Exempel på ett Minkowskidiagram. ct - och x -axlarna hör till inertialsystem S medan ct' - och x' -axlarna hör till inertialsystem S' som är i standardkonfiguration med S . De streckade linjerna är världslinjerna för föremål som rör sig med $v = c$ respektive $v = -c$ och de prickade linjerna är exempel på linjer med samma ct respektive samma ct' .

Händelser som är simultana i S , det vill säga har samma ct -koordinat, ligger på en linje parallellt med x -axeln, medan händelser som är simultana i S' , samma ct' -koordinat, ligger på en linje som

är parallell med x' -axeln. Man kan därför inse från diagrammet att händelser som är samtidiga i S inte är samtidiga även i S' .

Minkowskidiagram, som vi än så länge bara beskrivit med en rumskoordinat, kan också utökas till fler dimensioner. Rumtiden är fyrdimensionell med tre rumsdimensioner och en tidsdimension. Två rumsdimensioner är lätt att illustrera bara genom att lägga till en y -axel som gör Minkowskidiagrammet tredimensionellt, detta görs i Kapitel 6.5. Alla tre rumsdimensioner blir svårare då det skulle kräva ett fyrdimensionellt diagram.

■ **Exempel 2.2** Vi sätter nu upp ett Minkowskidiagram för situationen i Exempel 2.1. Eftersom $v = 3c/5$ ges ekvationen för ct' -axeln av $ct = 5x/3$ och ekvationen för x' -axeln av $ct = 3x/5$. Händelsen vid $t = 3$ meter/ c och $x = 5$ meter i Exempel 2.1 sätts in i Minkowskidiagrammet med koordinater $ct = 3$ meter och $x = 5$ meter. Prickiga linjer dras till ct - och x -axlarna.



Figur 2.5: Minkowskidiagram till Exempel 2.2.

Vi ser att händelsen ligger på x' -axeln, vilket betyder att $t' = 0$, precis som villkoret var i Exempel 2.1. ■

2.6 Intervall mellan två händelser

Ett annat viktigt och användbart begrepp inom speciell relativitetsteori är *intervallet* mellan två händelser. Detta är definierat enligt följande.¹

Definition 2.6.1 — Intervall. Intervallet, Δs , mellan två händelser i rumtiden med koordinaterna (t_1, x_1, y_1, z_1) och (t_2, x_2, y_2, z_2) , med $\Delta t = t_2 - t_1$ och liknande för Δx , Δy och Δz , är definierat enligt

$$\Delta s^2 := c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2.$$

Något av det viktigaste att notera med intervallet är att det är *Lorentzinvariant*, det vill säga att det är oförändrat efter en Lorentztransformation, $\Delta s^2 = \Delta s'^2$. Detta inses genom att sätta in ekvationerna

¹Var försiktig med att en annan definition av intervallet som ibland förekommer är $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$, d.v.s. med motsatt tecken.

för den inversa Lorentztransformationen, Ekvation (2.5), i definitionen av intervallet.

$$\begin{aligned}
 \Delta s^2 &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\
 &= c^2 \gamma^2 \left(\Delta t' + \Delta x' v / c^2 \right)^2 - \gamma^2 (\Delta x' + v \Delta t')^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\
 &= c^2 \gamma^2 \Delta t'^2 + 2c^2 \gamma^2 \Delta t' \Delta x' v / c^2 + c^2 \gamma^2 \Delta x'^2 v^2 / c^4 - \gamma^2 \Delta x'^2 \\
 &\quad - 2\gamma^2 \Delta x' \Delta t' v - \gamma^2 \Delta t'^2 v^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\
 &= c^2 \Delta t'^2 \gamma^2 \left(1 - v^2 / c^2 \right) - \Delta x'^2 \gamma^2 \left(1 - v^2 / c^2 \right) - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\
 &= \Delta s'^2
 \end{aligned}$$

Analogin till intervallet i Newtonsk mekanik är avståndet mellan två punkter. Avståndet Δr är vi där vana vid att beräkna med Pythagoras sats som $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, men avståndet är Galileiinvariant och inte Lorentzinvariant. Därför används istället Lorentzinvarianten Δs inom speciell relativitetsteori. En viktig skillnad mellan intervallet i rumtiden och avståndet i det Euklidiska rummet är att intervallet kan vara positivt, negativt eller noll, medan avstånd i Newtonsk mekanik alltid är positivt eller noll.

2.7 Övningsuppgifter

2.1 Visa att (2.4) och (2.5) är inversen av varandra.

2.2 Ett rymdskepp reser med konstant hastighet till en stjärna n ljusår bort på en tid som dess besättning anser vara m år.

(a) Vad är rymdskeppets hastighet?

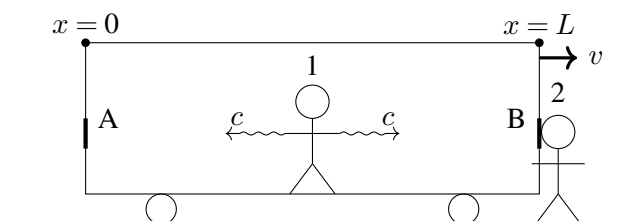
(b) Finns det några begränsningar för vilka värden m och n kan ta?

(c) Vad är skeppets hastighet om avståndet är $4.0 \cdot 10^{13}$ km och besättningen anser att det tar 10 år att åka dit?

2.3 En avlägsen stjärna sänder ut en gasstråle mot jorden med hastighet v i en vinkel θ med synlinjen, alltså med den rätta linje som kan dras mellan observatören och stjärnan. En astronom tolkar (felaktigt) denna stråle som att den rör sig med en hastighet V vinkelrätt mot synlinjen.

(a) Bestäm uttrycket för V som en funktion av v och θ .

(b) För vilka värden på v och θ är hastigheten V större än c ?



Figur 2.6: Tåg i Övningsuppgift 2.4.

2.4 Observatör 1 i Figur 2.6 står i mitten av ett tåg med vilolängd L , som färdas med hastighet v . Hen skjuter iväg två ljusstrålar mot spegel A (tågets bakdel) och B (tågets framdel) för vad hen uppfattas som samtidigt. Strålarna reflekteras sedan mot observatör 2, som står utanför tåget. Antag att observatör 2 står precis intill tågrälsen. De reflekterade ljusstrålarna måste färdas ortogonalt mot tågets färdriktning kan alltså försummas.

Observatör 2 är i linje med B precis när observatör 1 skjuter iväg ljusstrålarna, enligt Figur 2.6 nedan. Vilken hastighet ska tåget hålla för att observatör 2 ska se de reflekterade strålarna samtidigt?



3. De första resultaten

Vi har redan konstaterat att Einsteins andra postulat leder till en del resultat som till en början kan kännas icke-intuitiva. I detta kapitel presenteras två av dessa, tillsammans med de två första resultaten vi kan plocka från Lorentztransformationen, *längdkontraktion* och *tidsdilatation*.

3.1 Längdkontraktion

En av de konsekvenser som följer direkt från Einsteins postulat är vad som kallas längdkontraktion: att kroppar som rör sig förkortas i dess rörelseriktning. En raket som rör sig med hög hastighet relativt dig “pressas ihop” och bli kortare, jämfört med en likadan raket som är i vila relativt dig. En följd av detta är att en stel kropp, en kropp som ej kan deformeras, inte kan existera i speciell relativitetsteori på samma sätt som den gör i klassisk mekanik eftersom att alla kroppar deformeras när dess hastighet förändras.

Tänk dig två inertialsystem S och S' i standardkonfiguration med relativ hastighet v . Låt en stav med längd L_0 vara i vila i S' längs x' -axeln med ena änden i origo O' , det vill säga med bakre ände i $x'_{\text{bak}} = 0$ och främre ände i $x'_{\text{fram}} = L_0$. I S kommer då staven ha en längd L som inte nödvändigtvis är samma som L_0 . Längden i S definieras som $L = x_{\text{fram}} - x_{\text{bak}}$ vid samma tid t . x_{bak} är x -koordinaten av O' i S , d.v.s. $x_{\text{bak}} = vt$, således $x_{\text{fram}} = L + vt$. Enligt Lorentztransformationen, Ekvation (2.4), relaterar då x'_{fram} och x_{fram} genom

$$x'_{\text{fram}} = \gamma(x_{\text{fram}} - vt),$$

eller uttryckt med symbolerna L och L_0

$$L_0 = \gamma L,$$

vilket är formeln för längdkontraktion.

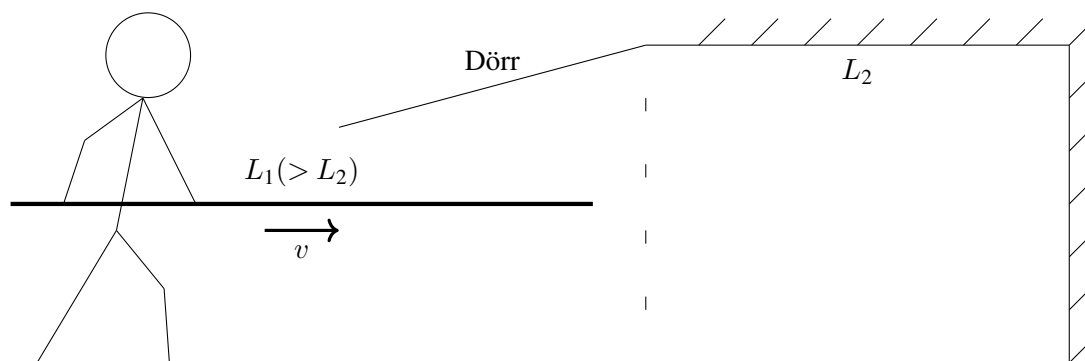
3.1.1 — Längdkontraktion.

$$L = \frac{L_o}{\gamma} \quad (3.1)$$

Detta betyder alltså att staven har olika längder i olika inertialsystem. Eftersom $\gamma \geq 1$ och ökar monotont med v gäller det att en kropp är som längst i det inertialsystem där den är i vila, vilket var S' i vårt exempel. Kroppen blir sedan kortare ju snabbare den rör sig. Som nämnt tidigare så sker denna kontraktion endast i hastighetsriktningen.

3.2 Staven och garaget

Ett vanligt misstag vid problemlösning i speciell relativitetsteori är att anta något som gäller i klassisk fysik men som inte längre gäller här då det motsäger Einsteins postulat. Man kan då komma fram till konsekvenser som är motsägelsefulla, så kallade paradoxer. Då dessa paradoxer är konsekvenser av ett feltänk är de inte paradoxer på riktigt och kan därför kallas för skenbara paradoxer. Här kommer ett exempel på en sådan. Om du själv inte förstår hur exemplet går ihop innan du har fått förklaringen ska du inte vara orolig, du är inte ensam.



Figur 3.1: Visualisering av den skenbara paradoxen *staven och garaget*. Personen rör sig med en hastighet v mot garaget med en stav vars vilolängd är större än garagets vilodjup. Staven får trots detta plats tack vare längdkontraktion, Ekvation (3.1), om v är tillräckligt stor.

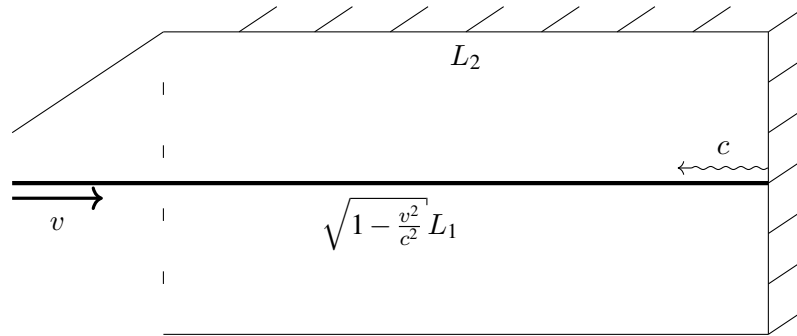
En person springer med en stav, med vilolängd L_1 , mot ett garage som har öppen dörr och är L_2 djupt. Garaget är inte tillräckligt djupt för att staven ska få plats i vila ($L_2 < L_1$). Om personen däremot springer tillräckligt snabbt kontraheras staven enligt Ekvation (3.1) och får då plats i garaget. Ett naivt (och **fel**) försök till beräkning av vilken hastighet som krävs för detta skulle kunna se ut såhär.

“I garagets inertialsystem har staven längden $L_1/\gamma(v)$ och den får då plats om $L_1/\gamma(v) < L_2$, det vill säga $v > c\sqrt{1 - (L_2/L_1)^2}$.”

Det är sant att staven får plats i garaget, och när personen väl har stannat i garaget kommer staven att bli längre igen och då antingen böjas eller gå sönder. Resonemanget ovan är dock inte korrekt, vilket vi nu ska ta reda på varför.

Den skenbara paradoxen uppstår först när man istället tänker på problemet i stavens inertialsystem och kommer fram till att garaget då borde bli ännu mindre och att staven då inte får plats. Felet man gör här är att man antar att två händelser som sker samtidigt i ett inertialsystem också sker samtidigt i alla andra inertialsystem, någonting som gäller i klassisk fysik men ej i speciell relativitetsteori, se Kapitel 2.3 Samtidighet.

För att reda ut paradoxen behöver man ta hänsyn till att alla typer av signaler maximalt kan färdas med hastigheten c . När stavens främre ände nuddar innerväggen på garaget kommer den bakre änden att fortsätta röra på sig tills dess att den elastiska våg som skapas i staven när den främre änden nuddar garaget har färdats genom staven till den bakre änden. Vi gör nu en noggrannare analys av situationen där vi låter den elastiska signalen färdas med ljushastigheten, vilket är den högsta möjliga hastigheten, (och en grov överskattning för en vanlig stel kropp!), och staven exakt får plats i garaget.



Figur 3.2: En närmare bild på “staven och garaget” i **garagets** inertialsystem, när den främre delen av staven just har nuddat garagets innervägg.

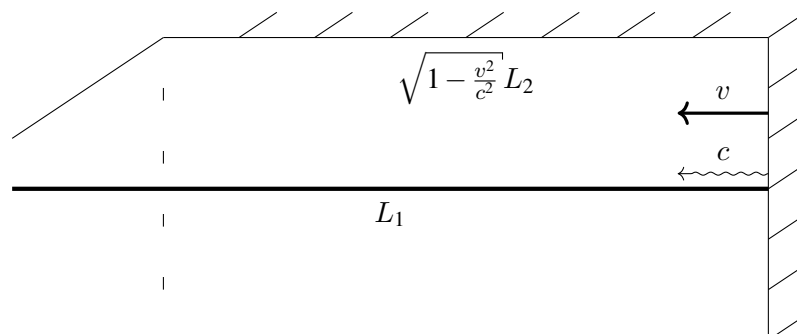
Kollar man på situationen i garagets inertialsystem tar den elastiska signalen tiden L_2/c att röra sig till dörren. Den bakre änden ska exakt komma innanför dörren, vilket den gör på tiden

$$\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} L_1 - L_2}{v},$$

från att stavens främre ände har slagit i väggen. Sätts dessa tider lika med varandra ska alltså hastigheten v uppfylla ekvationen

$$\frac{L_2}{c} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} L_1 - L_2}{v} \Rightarrow v = \frac{L_1^2 - L_2^2}{L_1^2 + L_2^2} c. \quad (3.2)$$

Notera här att staven får plats i garaget med marginal om den rör sig med hastigheten $v = c\sqrt{1 - L_2/L_1}$, som vi naivt beräknade innan vi hade satt oss in i problemet. Anledningen till det är att den bakre änden får extra tid på sig att komma in i garaget, medan den elastiska vågen färdas i staven. Detta tog vi ej hänsyn till i vår naiva beräkning.



Figur 3.3: En närmare bild på “staven och garaget” i **stavens** inertialsystem, när den främre delen av staven just har nuddat garagets innervägg.

Ser man istället på problemet i stavens inertialsystem kommer det ett garage med hastigheten v mot staven. När garaget nuddar staven skickas en elastisk våg genom staven, som tar tiden L_1/c att

komma till stavens bakre ände. Från att garagets vägg slår i stavens främre ände är tiden

$$\frac{L_1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} L_2}{v}$$

tills att garagedörren har kommit till stavens bakre ände. Sätts dessa tider lika med varandra ska hastigheten uppfylla ekvationen

$$\frac{L_1}{c} = \frac{L_1 - \sqrt{1 - v^2/c^2} L_2}{v}.$$

Vilket är samma ekvation som Ekvation (3.2) (fast på en annan form) och har därmed samma v som lösning. Samma svar erhålls alltså i båda inertialsystemen.

Fastän paradoxen inte var en riktig paradox finns det ändå en viktig poäng med denna historia. Om man kommer fram till ett resultat genom ett korrekt resonemang i ett inertialsystem måste detta resultat dels vara sant och dels gå att komma fram till i alla andra inertialsystem också. Dock kan förklaringarna till resultatet i olika inertialsystem skilja sig mycket åt.

Så klart är detta problem orealistiskt på många olika sätt, men det illustrerar i alla fall omöjligheten av stel-kropp begreppet i Speciell Relativitetsteori.

3.3 Tidsdilatation

Tidsdilatation är ett fenomen som är likt längdkontraktion på många sätt, men som behandlar tid istället för längd. Tidsdilatation innebär att tiden går långsammare i inertialsystem som har en hastighet, eller omformulerat, om du kollar på en klocka som sitter i ett rymdskepp som rör sig relativt dig går den långsammare än klockor som är i vila relativt dig. Nedan följer en härledning av tidsdilatation, analog med härledningen av längdkontraktionen.

Tänk dig två inertialsystem S och S' i standardkonfiguration med relativ hastighet v som förr. Låt en lysande lampa sitta i origo O' i S' -systemet som tänds efter en viss tid $t' = T_0$. Koordinaterna för när lampan tänds i S' blir då

$$(x', t') = (0, T_0).$$

I S tänds lampan vid tiden $t = T$, och koordinaterna i S blir då

$$(x, t) = (vT, T).$$

Enligt den inversa Lorentztransformationen, Ekvation (2.5), relaterar då T och T_0 enligt

$$T = \gamma(T_0 + 0 \cdot v/c^2) = \gamma T_0.$$

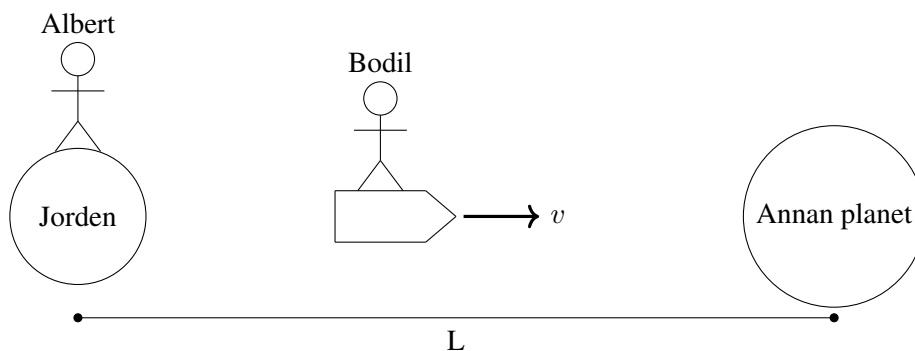
3.3.1 — Tidsdilatation.

$$T = \gamma T_0 \tag{3.3}$$

Detta betyder alltså att tiden går olika snabbt i olika inertialsystem. Eftersom $\gamma \geq 1$ och ökar monotont med v gäller det att tiden går som snabbast för en kropp i det inertialsystem där den är i vila och att den går långsammare ju snabbare den rör sig i ett inertialsystem.

3.4 Tvillingparadoxen

En annan skenbar paradox inom speciell relativitetsteori är den så kallade *tvillingparadoxen*. Den behandlar ett tvillingpar på jorden, där den ena tvillingen åker på en intergalaktisk resa för att sedan komma tillbaka till jorden.



Figur 3.4: Visualisering av tvillingparadoxen. Bodil åker med en hastighet v fram och tillbaka till en avlägsen planet. När hon sedan har fulländat sin resa är hon enligt tidsdilatationen yngre än sin tvilling Albert.

Tänk dig ett par tvillingar Albert och Bodil som bor på jorden. Bodil bestämmer sig för att åka på en rymdresa med hastighet v till en annan planet med avstånd L till jorden, för att sedan vända så fort hon kommer fram och åka tillbaka till jorden med samma hastighet v , se Figur 3.4. En fråga man då kan ställa sig är hur gamla tvillingarna är jämfört med varandra efter Bodils resa. I Alberts och jordens inertialsystem åldras Albert $t_A = 2\frac{L}{v}$ under resan medan Bodil, som har fart v hela tiden, åldras enligt tidsdilatation, Ekvation (3.3), $t_B = \frac{t_A}{\gamma} < t_A$. Alltså är Bodil yngre än Albert efter resan.

Den skenbara paradoxen uppstår när man frågar sig om man skulle få det motsatta resultatet, det vill säga att Albert blir yngre än Bodil, om man betraktar Bodil som i vila. Svaret på den frågan är att vi inte får betrakta Bodil som i vila under hela resan, eftersom att hon måste byta riktning vid planeten för att vända tillbaka till jorden. Eller med andra ord, det finns inget inertialsystem där Bodil är i vila under hela resan och Albert och Bodil är inte ekvivalenta. Notera att Bodils acceleration är obetydlig (förutom att någon acceleration måste ske för att Bodil ska byta riktning), ty tiden när Bodil accelererar kan göras så lite som möjligt jämfört med hela resetiden.

Dock är svaret $t_B = \frac{t_A}{\gamma}$ rätt, man kan få en mycket bättre intuition av det som pågår efter att man har studerat den relativistiska Dopplereffekten i Kapitel 5.2 och tänker sig att Albert och Bodil är i radiokontakt med varandra under Bodils resa. Vi kommer tillbaka till Alberts och Bodils äventyr då.

3.5 Övningsuppgifter

3.1 Myonen μ är en instabil partikel som sönderfaller spontant till en elektron och två neutriner. Vi vet att om antalet myoner vid $t = 0$ är N_0 , så är antalet myoner i vila vid tiden t lika med $N = N_0 e^{-t/\tau}$, där $\tau = 2.20 \mu\text{s}$ är den genomsnittliga livslängden för en myon i vila. Antag att myonerna rör sig med konstant hastighet $0.95 c$. Hur många myoner finns kvar efter att de har färdats avståndet 3.0 km ?

3.2 En bil med vilolängd 5 m håller hastigheten $(4/5)c$. Bilen kör igenom ett garage med vilolängd 4 m , som är *öppet på båda sidorna*. Två fotoceller P_{in} och P_{ut} markerar när bilen blockerar dörrarna där den kör in respektive ut.

(a) I vilken ordning sätts fotocellerna igång i garagets inertialsystem?

(b) I vilken ordning sätts de igång i bilens inertialsystem?

(c) Kan man svara entydigt på frågan "Är bilen någonsin i garaget?"?

3.3 Konstruera ett Minkowskidiagram för bilen och garaget i problemet ovan.

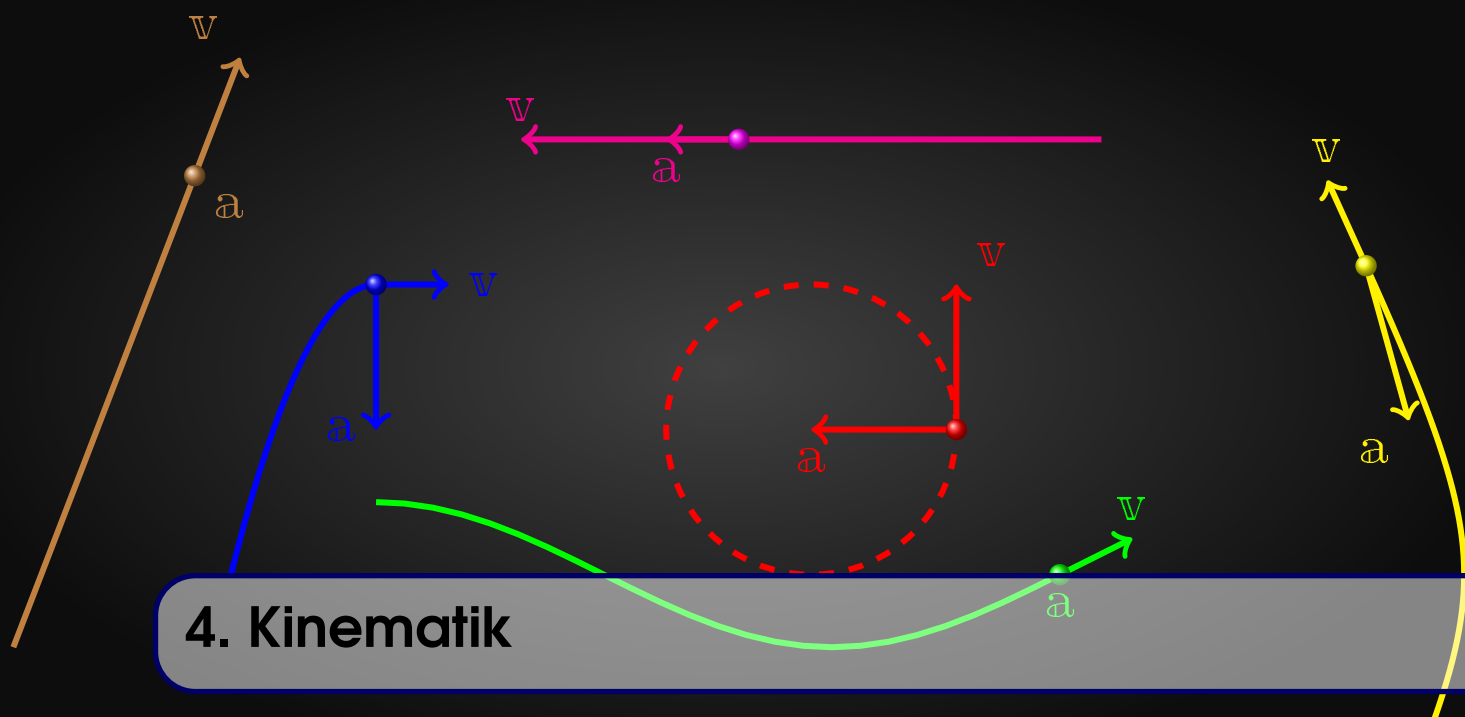
3.4 Ett rymdskepp reser med konstant hastighet till en stjärna 10 ljusår bort på en tid som dess besättning anser vara 5 år . Skeppet vänder sedan och åker tillbaka till jorden med samma hastighet. Hur lång tid tar hela resan ur jordens synvinkel?

3.5 Den genomsnittliga livslängden för en π -meson är i sitt egna inertialsystem 26.0 ns .

(a) Om mesonen rör sig med hastighet $0.95 c$ relativt jorden, hur lång genomsnittlig livslängd mäts av en observatör i vila på jorden?

(b) Vad är det genomsnittliga avståndet som mesonen färdas före sönderfall, mätt av en observatör i vila på jorden?

3.6 Konstruera ett Minkowskidiagram för tvillingparadoxen.



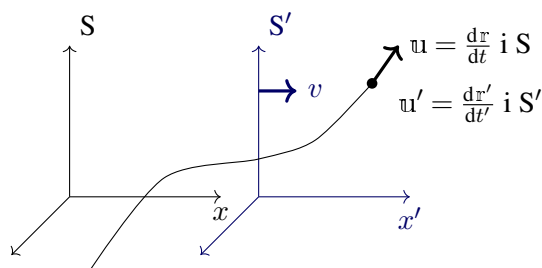
4. Kinematik

Kinematik är den del av mekaniken som beskriver kroppars rörelse utan beaktande av rörelsens orsaker. Kinematiken för en kropp beskriver hur kroppens position och orientering beror av tiden. Detta till skillnad från dynamik där begrepp som krafter och massa beaktas.

Kinematik inom relativistisk fysik är lik den inom klassisk fysik, men den stora skillnaden är hur byte av inertialsystem går till. I detta kapitel undersöker vi hur hastigheter och accelerationer adderas. Vi introducerar även viktiga begrepp som *rapiditet*, *momentant vilosystem*, *egentid* och *egenacceleration*.

4.1 Hastighetsaddition

Betrakta två inertialsystem i standardkonfiguration och en partikel som färdas med hastighet u i S och u' i S' , se Figur 4.1. Frågan är nu hur u' relateras till u . Observera att definitionen av hastighet i inertialsystemet S är densamma som i Newtonsk mekanik, det vill säga $u = \frac{dr}{dt}$ där r och t är lägeskoordinat respektive tidskoordinat i S . Likaså är acceleration i S definierad $a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$.



Figur 4.1: Två inertialsystem i standardkonfiguration, samt en partikel i rörelse.

Vi är sedan tidigare bekanta med koordinatbyte mellan S och S' , det vill säga Lorentztransformation. Denna bekantskap ska nu utnyttjas till att relatera hastighet och acceleration mellan olika inertialsystem. Hastighet fås från derivering av rumskoordinater med avseende på tiden, det vill

såga $\frac{dx}{dt}$ i S och $\frac{dx'}{dt'}$ i S'. Exempelvis är hastighetskomponenten i x' -led

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}. \quad (4.1)$$

u'_x kan uttryckas i termer av koordinater i S, genom att minnas $x' = \gamma(x - vt)$ och $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ i Ekvation (2.4). Sätts dessa uttryck in i Ekvation (4.1) erhålls (γ är konstant ty v är konstant)

$$u'_x = \frac{d[\gamma(x - vt)]/dt}{d[\gamma(t - vx/c^2)]/dt} = \frac{(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)}.$$

Med samma metod erhålls de övriga uttrycken för hastighetsaddition. Vi kan även tänka att vi sitter i S', det vill säga $v \rightarrow -v$ och härleda de inversa formlerna.

4.1.1 — Hastighetsaddition.

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, & u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}, & u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)}, \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}, & u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vi har inte gjort några antaganden, dessa ekvationer är giltiga oavsett hur partikeln rör sig. Om $c \rightarrow \infty$, därmed även $\gamma \rightarrow 1$, erhålls de klassiska ekvationerna för hastighetsaddition, $u'_x = u_x - v$, $u'_y = u_y$ och $u'_z = u_z$.

4.2 Rapiditet

Som vi såg i förra kapitlet kan uttryck som innehåller hastighet lätt bli stora och komplicerade. Man kan då använda sig utav ett alternativ till begreppet hastighet som kallas för *rapiditet*.

Definition 4.2.1 — Rapiditet. Rapiditeten ϕ beror på hastigheten v och definieras implicit från ekvationen

$$e^\phi = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right)^{1/2}$$

Man kan tänka på ϕ som ett alternativt mått på hastigheten v , då ϕ endast är beroende av v enligt definitionen ovan. Med denna definition av ϕ kan man också få de ibland mer användbara sambanden

$$\cosh(\phi) = \gamma, \quad \sinh(\phi) = \gamma v/c, \quad \text{och} \quad \tanh(\phi) = v/c. \quad (4.3)$$

Notera att när $v = 0$ är också $\phi = 0$ och när $v \rightarrow \pm c$ har vi att $\phi \rightarrow \pm\infty$ samt att ϕ antar negativa värden då v är negativ. Fördelen med att använda ϕ som variabel istället för v är att ϕ är enklare att använda då man vill byta mellan inertialsystem, till skillnad från v som får de mer komplicerade uttrycken i Kapitel 4.1 när man vill beräkna hastigheten för någonting i ett nytt inertialsystem.

Anta att vi har tre inertialsystem, S, S' och S'', i standardkonfiguration med varandra så att S' rör sig med en hastighet v_1 relativt S samt att S'' rör sig med en hastighet v_2 relativt S'. Rapiditeten för S relativt S' är ϕ_1 och rapiditeten för S' relativt S'' är ϕ_2 . Rapiditeten för S'' relativt S ges då

av $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Detta är lättare att arbeta med än att direkt ta fram vilken hastighet som S'' har relativt S , även om detta också går att göra. På grund av detta kan rapiditet ibland vara ett smidigare begrepp att arbeta med än hastighet och den används mycket inom partikelfysik.

Man kan visa att ϕ är "additiv" på detta sätt genom att skriva transformationen från S till S'' på matrisform och använda sambanden i Ekvation (4.3). Transformationen från S till S' , när vi transformerar x och ct , skrivs då som

$$\begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(v_1) & -\gamma(v_1)v_1/c \\ -\gamma(v_1)v_1/c & \gamma(v_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\phi_1) & -\sinh(\phi_1) \\ -\sinh(\phi_1) & \cosh(\phi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}.$$

För transformationen från S till S'' kan vi skriva

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ ct'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh(\phi_2) & -\sinh(\phi_2) \\ -\sinh(\phi_2) & \cosh(\phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ ct' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(\phi_2) & -\sinh(\phi_2) \\ -\sinh(\phi_2) & \cosh(\phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\phi_1) & -\sinh(\phi_1) \\ -\sinh(\phi_1) & \cosh(\phi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) + \sinh(\phi_1)\sinh(\phi_2) & -\sinh(\phi_1)\cosh(\phi_2) - \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2) \\ -\cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2) - \sinh(\phi_1)\cosh(\phi_2) & \sinh(\phi_1)\sinh(\phi_2) + \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(\phi_1 + \phi_2) & -\sinh(\phi_1 + \phi_2) \\ -\sinh(\phi_1 + \phi_2) & \cosh(\phi_1 + \phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

där additionsformlerna för de hyperboliska funktionerna används. Detta visar att ϕ är additiv. Man kan alltså skriva transformationen från S till S'' som en enda transformation med parametern $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

4.3 Accelerationsaddition

På samma sätt som för hastighetsaddition kan man härleda formler för accelerationsaddition: $a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ i S och $a' = \frac{du'}{dt'} = \frac{d^2x'}{dt'^2}$ i S' . Beräkningen i x -led ser ut på följande vis.

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{du'_x}{dt'} = \frac{d\left[\frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}\right] / dt}{d\left[\gamma(t - vx/c^2)\right] / dt} = \frac{1}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \frac{a_x(1 - vu_x/c^2) - (u_x - v)(-va_x/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)^2} \\ &= \frac{1}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \frac{a_x - \cancel{vu_x a_x/c^2} + \cancel{vu_x a_x/c^2} - v^2 a_x/c^2}{(1 - vu_x/c^2)^2} \\ &= \frac{1}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \frac{a_x(1 - v^2/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)^2} = \frac{a_x}{\gamma^3(1 - vu_x/c^2)^3}. \end{aligned}$$

Här har vi deriverat enligt kvotregeln. När vi strukit de termer som tar ut varandra och identifierar $1 - v^2/c^2 = 1/\gamma^2$, erhålls den slutgiltiga formeln. Samma räkning kan göras för de övriga komponenterna, samt inverst enligt samma logik som för läge och hastighet.

4.3.1 — Accelerationsaddition.

$$\begin{aligned}
a'_x &= \frac{a_x}{\gamma^3 (1 - vu_x/c^2)^3}, & a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^3 (1 + vu'_x/c^2)^3}, \\
a'_y &= \frac{a_y}{\gamma^2 (1 - vu_x/c^2)^2} + \frac{a_x u_y v/c^2}{\gamma^2 (1 - vu_x/c^2)^3}, & a_y &= \frac{a'_y}{\gamma^2 (1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{a'_x u'_y v/c^2}{\gamma^2 (1 + vu'_x/c^2)^3}, \\
a'_z &= \frac{a_z}{\gamma^2 (1 - vu_x/c^2)^2} + \frac{a_x u_z v/c^2}{\gamma^2 (1 - vu_x/c^2)^3}, & a_z &= \frac{a'_z}{\gamma^2 (1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{a'_x u'_z v/c^2}{\gamma^2 (1 + vu'_x/c^2)^3}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dessa reduceras till de klassiska ekvationerna om $c \rightarrow \infty$. Då gäller $a'_x = a_x$, $a'_y = a_y$ och $a'_z = a_z$.

4.4 Momentant vilosystem

Låt oss konstruera vårt inertialsystem S' så att partikeln i Figur 4.1 befinner sig i origo av S' vid tiden t , låt S' ha samma hastighet som partikeln $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, relativt S . Observera att allmänt så är S' och S ej i standardkonfiguration. Momentant har vi nu vad som kallas för ett *viloinertialsystem* för partikeln vid tiden t , men i resten av kompendiet väljer att använda oss av förkortningen *vilosystem*. I detta inertialsystem är $u'_x = u'_y = u'_z = 0$.

Definition 4.4.1 — Momentant vilosystem. Antag att en partikel P , vid en tidpunkt t , håller hastigheten $\mathbf{u}$ relativt ett inertialsystem S . Låt S' vara ett inertialsystem med hastighet $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ relativt S och beläget så att P befinner sig i origo av S' . Då säges S' vara ett momentant vilosystem för partikeln, vid tiden t .

Observera att man kan finna ett momentant vilosystem för varje tidpunkt till en partikel med godtycklig rörelse. Om och endast om partikelns hastighet är konstant gäller det att det momentana vilosystemet är samma vid alla tider.

4.5 Egentid

Egentid har vi egentligen redan erfarit i tidigare kapitel, dock ej namnet. Vi tänker oss en uppsättning synkroniserade standardklockor i vila i ett inertialsystem med namn S , dessa mäter tid t . Vi vill jämföra tiden som dessa klockor i S mäter med en klocka som färdas godtyckligt med en hastighet v genom inertialsystemet S , denna mäter tiden t' . För enkelhetens skull betraktar vi detta i en dimension, längs x -axeln. Det vill säga att vi har fallet i Figur 4.2, fast med partikeln utbytt mot en ideal klocka vars lägeskoordinat är $x' = 0$. Tidsskillnaden erhålls med hjälp av Lorentztransformationen, Ekvation (2.4), eller formeln för tidsdilatation, Ekvation (3.3) enligt

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' - v \Delta x' / c^2 \right) \Big|_{\Delta x' = 0} = \gamma \Delta t',$$

där γ anser klockan. Observera att i detta fall är γ tidsberoende för att klockan rör sig på ett godtyckligt sätt.

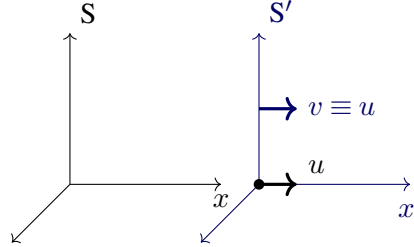
Nu introduceras det viktiga begreppet *egentid*, τ , vilket enkelt uttryckt är den tid, t' , som mäts av denna ideala klocka som färdas i S . Följande gäller inte endast rätlinjigt, utan oavsett hur klockan rör sig.

Definition 4.5.1 — Egentid, τ . Den tid som mäts av en ideal klocka, vars rörelse är godtycklig.

$$\Delta \tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau := \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma} dt$$

4.6 Egenacceleration

Liksom egentid definieras *egenacceleration*, α , som den acceleration som upplevs i S' , det momentana vilosystemet. Låt oss för enkelhetens skull betrakta rätlinjig endimensionell rörelse, med andra ord $u_x = u$, $u_y = u_z = 0$, $a_x = a$ och $a_y = a_z = 0$. (Det almännna fallet betraktas i Kap 6.) Vi ställer då upp våra inertialsystem enligt Figur 4.2, standardkonfiguration.



Figur 4.2: Partikeln färdas längs med x -axeln med hastighet u i S . Dess momentana vilosystem S' färdas, liksom partikeln, med hastighet $v \equiv u$ längs med x -axeln i S .

Vi ser, ur Ekvation (4.2) och (4.4), att $u'_x = u'_y = u'_z = a'_y = a'_z = 0$. Dock är accelerationen i x -led nollskild. Acceleration i det momentana vilosystemet, vid rätlinjig rörelse med acceleration längs x -axeln är därför

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3 (1 - vu_x/c^2)^3} = \{u_x = u = v\} = \frac{a_x}{\gamma^3 (1 - v^2/c^2)^3} = \gamma^3 a_x.$$

Därför definieras egenacceleration enligt följande.

Definition 4.6.1 — Egenacceleration, α .

$$\alpha := a' = \gamma^3 a = \frac{d}{dt} [\gamma v] \quad (4.5)$$

Det sista steget kan visas med hjälp av kedjeregeln enligt följande.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\gamma v] &= v \frac{d\gamma}{dt} + \gamma \frac{dv}{dt} = v \frac{d}{dt} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} + \gamma a = v \frac{va/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} + \gamma a = \\ &= \frac{v^2 a \gamma^3}{c^2} + \gamma a = \gamma a \left(\frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} + 1 \right) = \gamma a \left(\frac{v^2/c^2 + (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \right) = \\ &= \gamma a \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} \right) = \gamma^3 a \end{aligned}$$

4.7 Rätlinjig rörelse med konstant egenacceleration

Om egenaccelerationen α är konstant och rörelsen är rätlinjig kan Ekvation (4.5) integreras från tid $t = 0$ till en godtycklig tid t .

$$\int_0^t \alpha d\tilde{t} = \int_0^t \frac{d[\gamma v]}{d\tilde{t}} d\tilde{t} \implies \alpha t = \gamma v(t) - \cancel{\gamma v(0)}^0 \implies \alpha t = \gamma v(t) \quad (4.6)$$

Här är $\tilde{t}$ enbart en integrationsvariabel. Med valet $v(t = 0) = 0$, det vill säga att objektet står still då tiden börjar mätas, erhålls $\alpha t = \gamma v$. Observera att $\gamma = \gamma(v(t))$ och $\gamma(v = 0) = 1$. Ekvation (4.6)

kvadreras nu och v löses sedan ut.

$$\begin{aligned}
 (\alpha t)^2 &= \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} \implies (\alpha t)^2 \left(1 - v^2/c^2\right) = v^2 \implies \\
 (\alpha t)^2 &= v^2 + \frac{(\alpha t)^2 v^2}{c^2} = v^2 \left(1 + \frac{(\alpha t)^2}{c^2}\right) \implies v^2 = \frac{(\alpha t)^2}{1 + (\alpha t)^2/c^2} \implies \\
 v &= \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2/c^2}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ekvation (4.7) kan nu integreras ännu en gång, återigen från $t = 0$ till t , men först kan processen förenklas genom en smart omskrivning. Högerledet i sista raden ovan kan skrivas som

$$\frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2/c^2}} = \frac{c^2}{\alpha} \frac{d}{dt} \left[\sqrt{1 + (\alpha t)^2/c^2} \right].$$

Integrering ger nu

$$\begin{aligned}
 \int_0^t v d\tilde{t} &= \int_0^t \frac{c^2}{\alpha} \frac{d}{d\tilde{t}} \left[\sqrt{1 + (\alpha \tilde{t})^2/c^2} \right] d\tilde{t} \implies \\
 x(t) - \cancel{x(0)}^0 &= \frac{c^2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + (\alpha t)^2/c^2} - \sqrt{1 + 0} \right) \implies x(t) = \frac{c^2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + (\alpha t)^2/c^2} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Vi väljer här, liksom för v , att $x(0) = 0$. Alltså befinner sig objektet i $x = 0$ vid $t = 0$ och står still, momentant. Om vi flyttar över c^2/α till vänsterledet och kvadrerar finner vi

$$\left(x + \frac{c^2}{\alpha} \right)^2 = \frac{c^4}{\alpha^2} \left(1 + \frac{(\alpha t)^2}{c^2} \right) \implies \left(x + \frac{c^2}{\alpha} \right)^2 - (ct)^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}.$$

Genom att lösa ut x erhålls formelen för endimensionell rörelse med konstant egenacceleration α .

4.7.1 — Rätlinjig rörelse med konstant egenacceleration.

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) \tag{4.8}$$

för $x(0) = v(0) = 0$.

Om $c \rightarrow \infty$, i Ekvation (4.8), erhålls lägesekvationen för rätlinjig konstant acceleration inom Newtonsk mekanik, nämligen

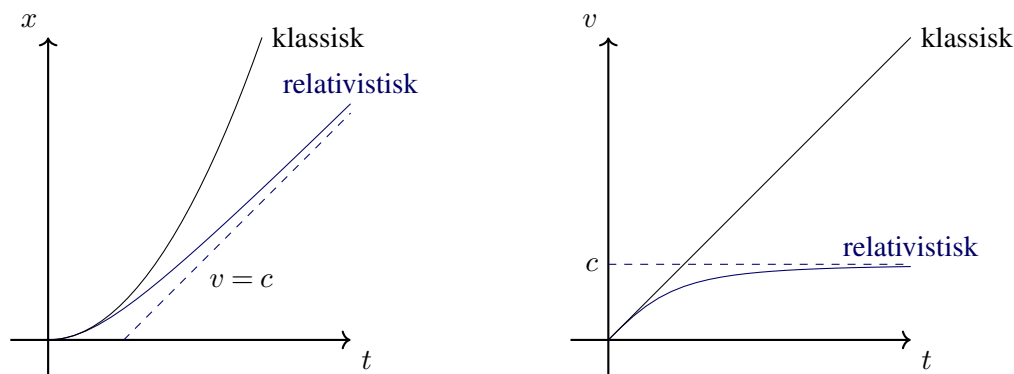
$$x = \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

Hastighetsekvationen för rätlinjig konstant acceleration inom Newtonsk mekanik erhålls från uttrycket för v i Ekvation (4.7), om $c \rightarrow \infty$. Det vill säga

$$v = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2/c^2}} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} v = \alpha t.$$

Det vill säga att om det inte existerar någon hastighetsbegränsning följer Newtons beskrivning av rörelse.

I Figur 4.3 jämförs den relativistiska och klassiska beskrivningen av rörelse för en partikel med rätlinjig konstant egenacceleration. Både läget och hastigheten visas.



Figur 4.3: Till vänster läge och till höger hastighet för en partikel med rätlinjig konstant egenacceleration. Observera skillnaden mellan klassisk och relativistisk rörelse.

Figur 4.3 visar enbart kvalitativt hur relativistisk rörelse förhåller sig till den klassiska beskrivningen, för låg hastighet stämmer klassisk mekanik väl överens med speciell relativitetsteori. Dock är vi i speciell relativitetsteori begränsade av ljushastigheten, vilken vi ser i den högra grafen i Figur 4.3, där den relativistiska hastighetskurvan planar ut och har $v = c$ som asymptot.

4.8 Övningsuppgifter

4.1 En elektron rör sig i ett inertialsystem enligt ekvationerna $x = A\omega t$, $y = A \sin(\omega t)$ och $z = 0$ för $t > 0$.

- (a) Bestäm accelerationen som funktion av t .
- (b) Finns det några begränsningar för vilka värden ω och A kan ta?
- (c) En annan observatör åker med konstant hastighet u längs z -axeln. Vad är accelerationen för elektronen i denna observatörs inertialsystem?

4.2 En partikel, som rör sig med konstant hastighet $u = c/2$ i ett inertialsystem S , gör en vinkel $\alpha = \pi/6$ med den positiva x -axeln. En observatör rör sig längs x -axeln med hastighet v , som definierar ett nytt inertialsystem S' i standardkonfiguration. Vad är hastigheten v om partikeln åker ortogonalt mot x' -axeln enligt observatören i S' ?

4.3 En *ljusklocka* består av två speglar i ändarna av en kort stav och en foton som studsar mellan speglarna. Bevisa att en sådan klocka kommer att gå långsamt med den förväntade Lorentz-faktorn om den färdas...

- (a) ... longitudinellt.
- (b) ... tvärs genom ett inertialsystem.
- (c) Vad kan du säga om det fall där rörelsen varken är tvärgående eller longitudinell?

4.4 I ett givet inertialsystem S åker två partiklar samtidigt från en given punkt med samma fart v och med vinkeln 30 grader mellan varandra. Vad är partiklarnas hastighet relativt varandra?

4.5 Om längdkontraktion:

- (a) Två partiklar rör sig längs x -axeln i ett inertialsystem S med hastigheter $0.6c$ och $0.7c$, den snabbaste börjar 1 m bakom. Hur många sekunder i S tar det innan den snabbaste har åkt förbi den långsammaste?
- (b) En stång med vilolängd 1 m rör sig med hastigheten $0.6c$ i S . En partikel, med hastigheten $0.7c$ i S , färdas i samma riktning som stängen. Hur lång tid tar det för partikeln att passera

stången, från det att den är vid stavens bakdel?

(c) Är de två svaren lika eller olika och varför?

4.6 En partikel rör sig i ett inertialsystem (x, t) enligt ekvationen $x = (k/3) t^3$, där k är en konstant. Härled egenaccelerationen för partikeln. Är ekvationen ovan giltig för alla tider?

4.7 Två rymdskepp åker mot jorden med samma hastighet från motsatta riktningar. En stav som pekar i färdriktningen på ett rymdskepp har där längden 1 m, men ser bara ut att vara 60 cm enligt en observatör i det andra rymdskeppet. Hur lång är staven ur jordens synvinkel?

4.8 Två rymdskepp åker mot varandra, båda med samma hastighet uppmätt av en stationär observatör på jorden. Deras relativa hastighet är $0.9 c$. Bestäm hastigheterna för rymdskeppen, uppmätt av den stationära observatören på jorden.

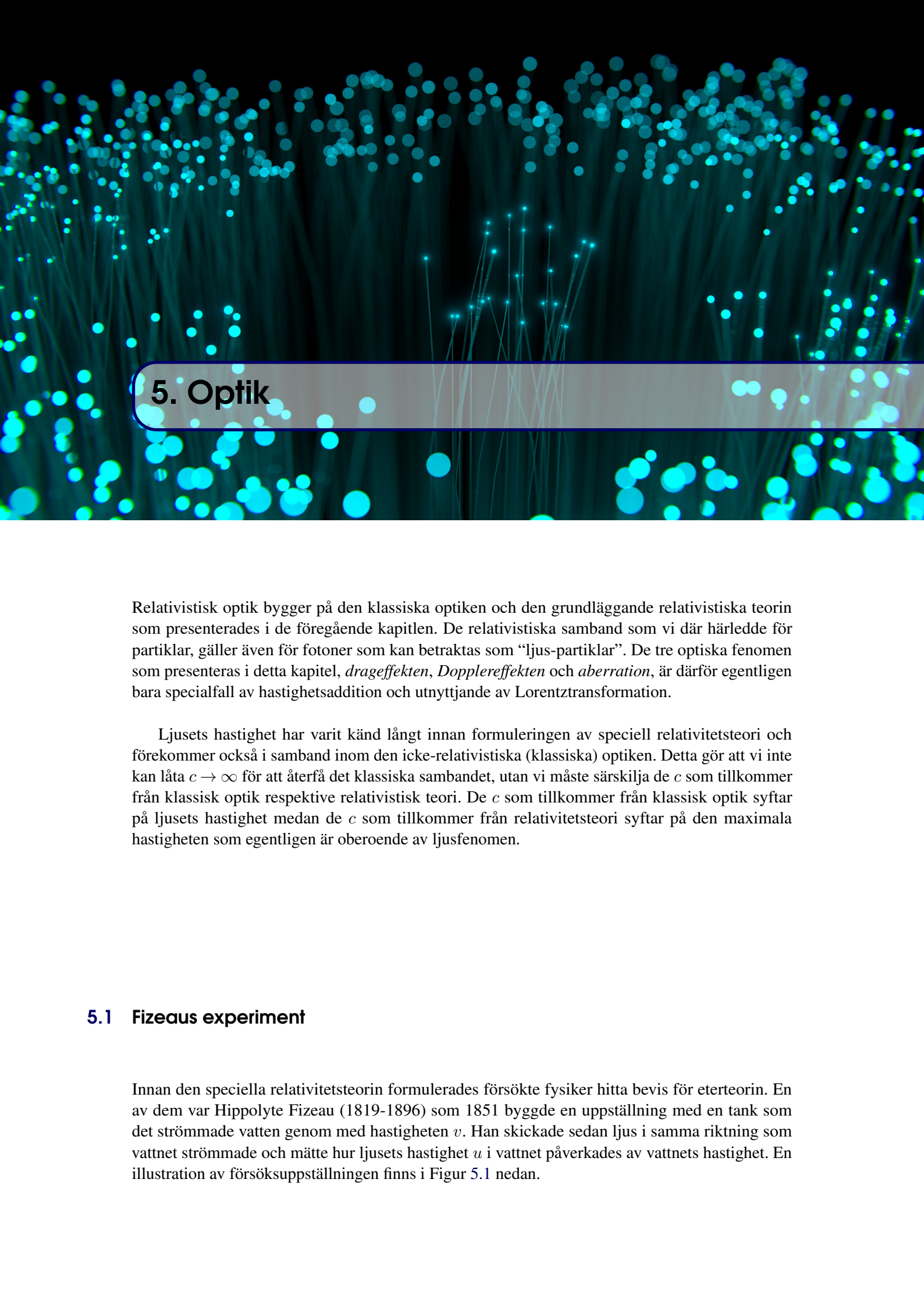
4.9 En stationär observatör på jorden observerar rymdskepp A och B, som rör sig i samma riktning mot Jorden. Rymdskepp A har hastighet $0.6 c$ och rymdskepp B har hastighet $0.7 c$ relativt jorden. Bestäm hastigheten för rymdskepp A, uppmätt av en observatör i vila i rymdskepp B.

4.10 Om rörelse med konstant egenacceleration:

(a) Skriv om jordens tyngdaccelerationen $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ i enheter ljusår (ly) per år per år och visa att $g = 1 \text{ ly/yr}^2$, d.v.s. besättningen på en rymdraket som accelererar med en sådan egenacceleration skulle känna sig bekväma. Antag att raketen startar i vila vid origo av en inertialsystem som vi identifierar med jorden.

(b) Beräkna Lorentzfaktorn relativ jorden γ efter 1 dag, 1 år och 10 år i raketens egentid. Beräkna också hur långt från jorden raketen befinner sig efter dessa tider.

(c) Om raketen accelererar 10 år i egentid, decelererar 10 år i samma riktning, vänder sig tillbaka och repeterar samma process tills den kommer tillbaka till jorden (med besättning som är 40 år äldre), hur mycket tid har gått från jordens referenssystem?



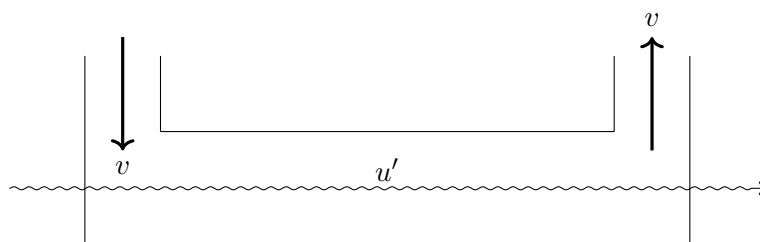
5. Optik

Relativistisk optik bygger på den klassiska optiken och den grundläggande relativistiska teorin som presenterades i de föregående kapitlen. De relativistiska samband som vi där härledde för partiklar, gäller även för fotoner som kan betraktas som “ljus-partiklar”. De tre optiska fenomen som presenteras i detta kapitel, *drageffekten*, *Dopplereffekten* och *aberration*, är därför egentligen bara specialfall av hastighetsaddition och utnyttjande av Lorentztransformation.

Ljusets hastighet har varit känd långt innan formuleringen av speciell relativitetsteori och förekommer också i samband inom den icke-relativistiska (klassiska) optiken. Detta gör att vi inte kan låta $c \rightarrow \infty$ för att återfå det klassiska sambandet, utan vi måste särskilja de c som tillkommer från klassisk optik respektive relativistisk teori. De c som tillkommer från klassisk optik syftar på ljusets hastighet medan de c som tillkommer från relativitetsteori syftar på den maximala hastigheten som egentligen är oberoende av ljusfenomen.

5.1 Fizeaus experiment

Innan den speciella relativitetsteorin formulerades försökte fysiker hitta bevis för eter teorin. En av dem var Hippolyte Fizeau (1819-1896) som 1851 byggde en uppställning med en tank som det strömmade vatten genom med hastigheten v . Han skickade sedan ljus i samma riktning som vattnet strömmade och mätte hur ljusets hastighet u i vattnet påverkades av vattnets hastighet. En illustration av försöksuppställningen finns i Figur 5.1 nedan.



Figur 5.1: Fizeaus experiment. Vatten strömmar genom tanken med hastighet v , samtidigt som ljus färdades relativt vattnet med hastighet u' . Experimentet mäter u , d.v.s. ljusets hastighet i labbet (med hjälp av en interferometer, så klart).

Kom ihåg att ljusets hastighet u' i en vätska i vila är mindre än i vakuum c . Detta fenomen var välkänt redan på 1800-talet när fysiker införde begreppet av brytningsindex: $n = c/u'$. Till exempel, för vatten är $n = 1.33$.

På 1800-talet kunde man tänka sig två extrema hypoteser. En var att vatten inte påverkade etern alls och att ljuset då skulle ha samma hastighet relativt en observatör i labbet, oavsett vad vattnet hade för hastighet: $u = u'$. En annan hypotes var att vattnet drog med sig etern helt och att ljusets hastighet relativt observatören skulle bli ljusets hastighet relativt vattnet adderat med vattnets hastighet: $u = u' + v$.

Resultatet visade sig vara ett mellanting av hypoteserna. Ljusets observerade hastighet relativt en observatör i labbet var större när vattnet flödade än när det låg stilla, men den blev heller inte lika stor som summan av vattnets hastighet och ljusets hastighet relativt det stilla vattnet. Dessa hastigheter relaterade Fizeau till varandra enligt *Fizeaus formel*.

5.1.1 — Fizeaus formel.

$$u = u' + kv \quad (5.1)$$

Här är k dragkoefficienten. Observera här att $k = 0 \iff u = u'$ betyder inget drag och att $k = 1 \iff u = u' + v$ betyder fullkomligt drag. Mätningar gav $k = 0.44$ och vattnet antogs nu dra med sig etern, men bara delvis, och skapade därmed en *drageffekt*. Experiment med olika vätskor visade att k kunde relateras till brytningsindex för vätskan enligt en mystisk formel:

$$k = 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{u'^2}{c^2}. \quad (5.2)$$

Sätts Ekvation (5.2) in i Ekvation (5.1) erhålls sambandet

$$u = u' + v \left(1 - \frac{u'^2}{c^2} \right).$$

Med hjälp av relativitetsteori kan allt det här nu förklaras utan eter med hjälp av relativistisk hastighetsaddition (4.2) och Taylorutveckling av den. Ljuset rör sig med hastighet u' relativt vattnet och vattnet rör sig med hastighet v relativt labbet. Under det korrekta antagandet att $u' \gg v$ rör sig därför ljuset relativt labbet med hastigheten

$$\begin{aligned} u &= \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = (u' + v) \left[1 - \frac{u'v}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right] = \\ &= u' + v \left(1 - \frac{u'^2}{c^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = u' + kv + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Termer av ordning v^2/c^2 och högre kan försummas, detta på grund av att $v \ll c$. Mätutrustningen som var till förfogande för Fizeau var helt enkelt inte tillräckligt precis för att kunna mäta inverkan från termer av ordning högre än v/c .

Detta är en relativt enkel applikation av relativistisk hastighetsaddition, men det dröjde ända till 1907 innan Max von Laue (1879-1960) härledde den, två år efter Einsteins banbrytande artikel.

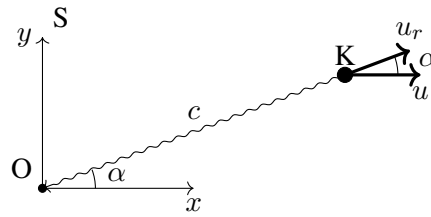
5.2 Dopplereffekten

Dopplereffekten förekommer redan i klassisk optik, men vid intåget av speciell relativitetsteori kunde sambandet förfinas. Vågor från en inkommande källa upplevs av en observatör ha högre frekvens än vågor från en utgående källa. Detta gäller även för vågor med lägre hastighet än ljusets. Ljudfrekvensen från en ambulans är högre om den är på väg mot en observatör än om den är på väg från observatören.

Till skillnad från Lorentztransformationen och dess invers, där man bara behöver byta tecken på v när man byter mellan x och x' , behöver man vara mer eftertänksam när man går mellan Dopplereffekten för rörlig källa respektive observatör.

5.2.1 Dopplereffekten för rörlig källa

En fotonkälla K rör sig med hastighet u och radiell hastighet u_r relativt en observatör O som är i vila i origo i inertialsystemet S. Källan sänder ut fotoner i intervaller med periodtid $\Delta\tau$.



Figur 5.2: Dopplereffekten för rörlig källa. En observatör O är stationär i S samtidigt som en källa K färdas med hastighet u och radiell hastighet u_r relativt observatören.

Enligt observatören O sänder källan ut fotoner med periodtiden $\gamma\Delta\tau$ i referenssystem S på grund av tidsdilatation. Men en foton måste också åka sträckan $\gamma\Delta\tau u_r$ längre i S, jämfört med den foton som skickades iväg en period tidigare. Därför kommer observatören O att ta emot fotonerna med periodtiden

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau + \frac{u_r}{c}\gamma\Delta\tau.$$

Observatören O tar emot fotonerna med frekvens ν . Frekvensen med vilken källan sänder ut fotonerna är ν_0 . Eftersom dessa frekvenser är omvänt proportionella mot periodtiderna Δt respektive $\Delta\tau$ är sambandet kallat Dopplereffekten för rörlig källa följande.

5.2.1 — Dopplereffekten för rörlig källa.

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \gamma(1 + u_r/c) = \frac{1 + u_r/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (5.3)$$

Vi kan alltid välja att orientera x -axeln parallellt till u . Om vi definierar α som vinkeln mellan positiva x -axeln och fotonstrålen från källan i S när en foton sänds ut, se Figur 5.2, kan sambandet

skrivas som

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{1 + (u/c) \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Om källans hastighet enbart är radiell, det vill säga om $u_r = u$ eller $\alpha = 0$, förenklas uttrycket till

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}.$$

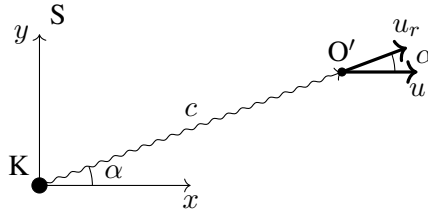
En Taylorutveckling av Ekvation (5.3) ger

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{1 + u_r/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 1 + \frac{u_r}{c} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{u^3}{c^3}\right).$$

Om termer av andra ordningen försummas är uttrycket detsamma som för den ickerelativistiska Dopplereffekten. Speciell relativitetsteori spelar alltså bara in på termer av ordning högre än första.

5.2.2 Dopplereffekten för rörlig observatör

Vi studerar nu det motsatta fallet: en källa som är stationär i origo av S och en observatör O' , som rör sig med hastighet u och radiell hastighet u_r relativt källan.



Figur 5.3: Dopplereffekten för rörlig observatör. En källa K är stationär i S samtidigt som en observatör O' färdas med hastighet u och radiell hastighet u_r relativt källan.

Tiden mellan två utsända fotoner i S är $\Delta\tau$. Tiden mellan att de två fotonerna når fram till observatören, ur källans perspektiv i S, är

$$\Delta t_s = \Delta\tau + \frac{u_r}{c} \Delta t_s, \quad (5.4)$$

där termen $\frac{u_r}{c} \Delta t_s$ tillkommer eftersom den andra fotonen färdas sträckan $u_r \Delta t_s$ längre. Egentiden i O' s momentana inertialsystem är

$$\Delta t = \frac{\Delta t_s}{\gamma}, \quad (5.5)$$

på grund av tidsdilatation. Sätts Ekvation (5.5) in i Ekvation (5.4) erhålls

$$\Delta t = \frac{1}{\gamma(1 - u_r/c)} \Delta\tau.$$

Precis som förr är frekvensen som källan sänder ut fotoner med ν_0 och frekvensen som observatören tar emot fotoner med ν . Eftersom dessa frekvenser är omvänt proportionella mot periodtiderna $\Delta\tau$ respektive Δt är sambandet kallat Dopplereffekten för rörlig observatör följande.

5.2.2 — Dopplereffekten för rörlig observatör.

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \gamma (1 - u_r/c) = \frac{1 - u_r/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (5.6)$$

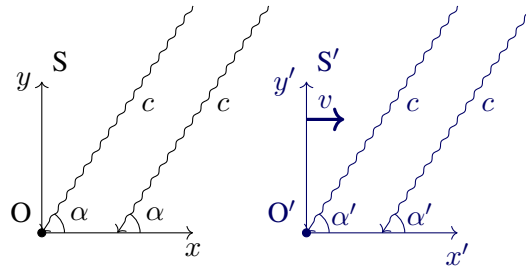
Notera att Ekvation (5.6) inte kan erhållas från (5.3) genom att byta tecken på u_r ! (Vänsterleden är annorlunda.) Detta beror på att u_r inte är samma hastighet vid rörlig källa respektive observatör. I det första fallet handlar det om u_r vid utsändande och i det andra vid mottagning av fotoner. Om $u = u_r$, d.v.s. vi behandlar ett en-dimensionellt fall (radiell rörelse), är dock Ekvation (5.3) och (5.6) samma ekvation.

5.3 Aberration

Aberration är också ett fenomen som märks även vid hastigheter långt under de relativistiska. När man springer i vertikalt fallande regn, känns det som att regnet egentligen faller snett. Detta kan förklaras med hjälp av Galileitransformationen, Ekvation (1.1), men nu skall relativistisk aberration härledas och då används istället Lorentztransformationen, Ekvation (2.4).

5.3.1 Aberration av ljus

Ett inertialsystem S är fixt medan ett annat inertialsystem S' åker med en hastighet v relativt S i standardkonfiguration. Fotoner sänds ut från en källa "oändligt" långt bort. Detta gör att vinkeln mot x -axeln i Figur 5.4 är den samma för alla x . En observatör O i origo av S ser det som att ljuset kommer från en vinkel α mot x -axeln, medan en observatör O' i origo av S' ser det som att ljuset kommer från en vinkel α' mot x' -axeln.



Figur 5.4: Aberration av ljus. Fotoner infaller från en källa "oändligt" långt bort, mot observatörerna O och O' .

Fotonerna som sänds ut från källan håller hastigheten c , med riktning mot observatörerna O och O' . I S är därför hastigheterna i x - respektive y -led

$$u_x = -c \cos(\alpha) \quad \text{och} \quad u_y = -c \sin(\alpha).$$

I S' är hastigheterna i x' - respektive y' -led

$$u'_x = -c \cos(\alpha') \quad \text{och} \quad u'_y = -c \sin(\alpha').$$

Genom att sätta in givna hastigheter i hastighetsadditionsformlerna från Ekvation (4.2) erhålls aberrationsformlerna för ljus.

5.3.1 — Aberrationsformlerna för ljus.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha') &= \frac{\cos(\alpha) + v/c}{1 + (v/c)\cos(\alpha)}, & \sin(\alpha') &= \frac{\sin(\alpha)}{\gamma(1 + (v/c)\cos(\alpha))}, \\ \tan(\alpha') &= \frac{\sin(\alpha)}{\gamma(\cos(\alpha) + v/c)}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Tangensuttrycket kommer från division av de andra två. Genom att använda den trigonometriska relationen

$$\tan\left(\frac{1}{2}\alpha'\right) = \frac{\sin(\alpha')}{1 + \cos(\alpha')}$$

erhålls

$$\tan\left(\frac{1}{2}\alpha'\right) = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right).\tag{5.8}$$

Om v är positiv, alltså om S' färdas positivt i x -led, är α större än α' . Detta blir mer påtagligt ju större hastigheten för S' är. Om v istället är negativ, alltså om S' färdas negativt i x -led, är α mindre än α' . Även här blir effekten mer påtaglig ju större hastigheten för S' är.

5.3.2 Dopplerfaktorn, strålkastareffekten och Luminositet

Kombinationen av v och c i (5.8) förekommer ofta i relativitetsteori och brukar då kallas för *Dopplerfaktorn*.

Definition 5.3.1 — Dopplerfaktorn.

$$D := \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

(Notera att D är invers av faktorn i (5.8).)

Vi kan använda Dopplerfaktorn för att få en kvalitativ känsla av ett intressant ljusfenomen som kallas för strålkastareffekten. Betrakta återigen Figur 5.4 men sätt nu en ljuskälla vid O' . Fotonerna färdas nu från observatörerna O och O' , alltså är deras hastighetskomponenter i x - och y -led positiva. Därför byts $-c$ ut mot c i Ekvation (5.7). Om v är positiv, alltså om S' färdas positivt i x -led, sprider nu ljuset från källan ut sig mindre i S jämfört med S' . (Se bild 5.5, anta att källan kommer mot observatören O från vänstersidan.)

För en observatör O i S ser det ut som att källan skickar ut fler fotoner i den riktning som källan färdas. Om källan färdas mot O , kommer O att se det som att källan skickar fler fotoner mot O än i någon annan riktning. Vid mycket stora hastigheter för källan skjuts därför nästan allt ljus ut i en liten kon framför källan i observatören O s inertialsystem S . Detta kallas för strålkastareffekten.



Figur 5.5: Strålkastareffekten. Källan sett ur sitt egna momentana vilosystem S' till vänster och ur en observatör O s inertialsystem S då källan åker mot observatören med hastighet v till höger. Trots att källan sänder ut fotoner likformigt i alla riktningar i sitt eget inertialsystem, ser det för O ut som att källan skickar flest fotoner mot O .

Fenomenet blir ännu mer påtagligt om vi använder begreppet *luminositet*.

Definition 5.3.2 — Luminositet. Luminositeten L definieras som den utstrålade effekten från en källa.

Om källan, i sitt eget inertialsystem, strålar ut fotoner i en liten rymdvinkel Ω' i den riktning som källan färdas, kan en Taylorutveckling av tangensfunktionen göras enligt

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \alpha' = D\alpha',$$

där α och α' är endimensionella små vinkelnar som källan strålar ut fotoner med i S respektive S' . Utstrålningsvinkeln blir alltså mindre i S än i S' , enligt Figur 5.5. I S är rymdvinkeln som källan sänder ut fotoner genom Ω , den kan relateras till Ω' enligt: ($\Omega \propto \alpha^2$)

$$\Omega \approx \frac{c+v}{c-v} \Omega' = D^2 \Omega'.$$

Luminositeten L genom rymdvinkeln Ω ökar dock med ytterligare två Dopplerfaktorer jämfört med L' genom rymdvinkeln Ω' . En Dopplerfaktor på grund av att varje foton har högre energi i S och en Dopplerfaktor på grund av att det sänds ut fler fotoner per sekund i S. Sammantaget är därför luminositetsförhållandet mellan S och S'

$$L \approx D^4 L' = \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^2 L'.$$

5.3.3 Aberration av partiklar och vågor

Betrakta nu partiklar som kommer in mot O och O' med hastighet $u < c$, istället för fotoner med hastighet c , från en källa "oändligt" långt bort. Vinklarna mot x - och x' -axeln är precis som för ljus α respektive α' för S respektive S' . Hastighetskomponenterna är nu istället

$$u_x = -u \cos(\alpha), \quad u_y = -u \sin(\alpha), \quad u'_x = -u' \cos(\alpha') \quad \text{och} \quad u'_y = -u' \sin(\alpha') \quad (5.9)$$

i S respektive S' . Till skillnad från ljus är nu $u \neq u'$. Sätts Ekvation (5.9) in i hastighetsadditionsformlerna från Ekvation (4.2) erhålls

$$u' \cos(\alpha') = \frac{u \cos(\alpha) + v}{1 + (vu/c^2) \cos(\alpha)} \quad \text{och} \quad u' \sin(\alpha') = \frac{u \sin(\alpha)}{\gamma (1 + (vu/c^2) \cos(\alpha))}. \quad (5.10)$$

Eftersom vi inte vet vad u' är, får vi inte ut speciellt mycket av Ekvation (5.10). Dock kan u' elimineras genom att dividera uttrycken med varandra. Då erhålls aberrationsformeln för partiklar.

5.3.2 — Aberrationsformeln för partiklar.

$$\tan(\alpha') = \frac{\sin(\alpha)}{\gamma (\cos(\alpha) + v/u)} \quad (5.11)$$

Aberrationsformeln för partiklar kan inte förenklas lika mycket som tangensfunktion i aberrationsformlerna för ljus, detta eftersom $u < c$, se Ekvation (5.7). Om partikelns hastighet går mot ljusets ($u \rightarrow c$) gäller

$$\tan(\alpha') = \frac{\sin(\alpha)}{\gamma (\cos(\alpha) + v/c)},$$

vilket är samma samband som togs fram för aberration av ljus i Ekvation (5.7).

Istället för partiklar kan också vågor med hastighet $w < c$ betraktas.

OBS! Förväxla inte vågens hastighet w med dess vinkelhastighet $\omega = 2\pi\nu$.

Följande ekvationer beskriver en våg som rör sig med vinkel α mot x -axeln och hastighet w i S , samt vinkel α' mot x' -axeln och hastighet w' i S' .

$$x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = C - wt \quad \text{och} \quad x' \cos(\alpha') + y' \sin(\alpha') = C' - w't' \quad (5.12)$$

Här är C och C' är konstanter med dimension längd. Genom att Lorentztransformera x och t erhålls

$$\begin{aligned} \gamma(x' + vt') \cos(\alpha) + y' \sin(\alpha) &= C - w\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \Rightarrow \\ x'\gamma\left(\cos(\alpha) + \frac{wv}{c^2}\right) + y' \sin(\alpha) &= C - \gamma(w + v \cos(\alpha))t'. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Koefficienterna för x' och y' i Ekvation (5.12) måste vara proportionella mot motsvarande koefficienter i Ekvation (5.13). Denna proportionalitetskonstant får namnet A , förhållandena är då

$$\cos(\alpha') = A\gamma\left(\cos(\alpha) + \frac{wv}{c^2}\right) \quad \text{och} \quad \sin(\alpha') = A \sin(\alpha). \quad (5.14)$$

Genom att dividera sambanden i Ekvation (5.14) erhålls aberrationsformeln för vågor.

5.3.3 — Aberrationsformeln för vågor.

$$\tan(\alpha') = \frac{\sin(\alpha)}{\gamma\left(\cos(\alpha) + \frac{wv}{c^2}\right)}$$

Precis som aberrationsformeln för partiklar, Ekvation (5.11), kan inte aberrationsformeln för vågor förenklas lika mycket som tangensfunktionen i aberrationsformlerna för ljus, Ekvation (5.7). Detta på grund av att $w < c$, men om vågens hastighet går mot ljusets ($w \rightarrow c$) gäller

$$\tan \alpha' = \frac{\sin(\alpha)}{\gamma(\cos(\alpha) + v/c)}.$$

Detta är precis samma samband som för en partikel och ljus. En partikel med hastighet u aberrerar alltså på samma sätt som en våg med hastighet $w = c^2/u$. Om $u < c$ är $w > c$ och vice versa.

5.4 Övningsuppgifter

5.1 Beräkna korrektionstermen av ordning två till Fizeaus formel $u = u' + kv$. Vad är korrektionen i % för vatten ($n = 4/3$) som rör sig med hastigheten 1 m/s?

5.2 Vatten åker genom ett rör med hastigheten $(1/2)c$ (orealistiskt!). En ljusstråle åker genom vattnet, med samma riktning som vattnet. Vattnets brytningsindex är $n = 4/3$.

(a) Vad är ljusets hastighet i förhållande till labbets inertialsystem?

(b) Vad blir svaret om man använder sig av Fizeaus formel istället?

5.3 En källa som strålar ut monokromatiskt ljus med egenfrekvens ν_0 är fixerad vid origo i ett inertialsystem S . En observatör färdas genom S med hastighet $c/2$, med den radiella komponenten $u_r = c/3$, relativt källan. Vilken frekvens för källan ser observatören?

5.4 En källa, som sitter vid origo för ett inertialsystem, sänder ut fotoner med en egenfrekvens ν_0 . En observatör åker med konstant hastighet v på en bana parallell med y -axeln och korsar x -axeln vid $x = x_0$. Härled frekvensen som observatören ser när den korsar x -axeln och mycket senare när den har förflyttats väldigt långt bort ($y \rightarrow \infty$).

5.5 Vätes så kallade Lyman α linje, som uppstår i $2p \rightarrow 1s$ -övergången, har en våglängd $\lambda_0 = 1215 \text{ \AA}$ i labbet. Man observerar samma övergång från en avlägsen supernova med våglängd $\lambda_0 = 9682 \text{ \AA}$.

(a) Antag att supernovan rör sig i radiell riktning från oss och beräkna supernovans hastighet v .

(b) Enligt *Edwin Hubbles lag* är en stjärnas avstånd från jorden d relaterat till v enligt $v = Hd$ där $H = 72 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ (Mpc = megaparsec). Bestäm supernovans avstånd från jorden i Mpc.

5.6 Om man inte tar hänsyn till tidsdilatation, blir Dopplers formel på frekvensform för en källa som rör sig bort från jorden i radiell riktning med hastighet u

$$\frac{\nu_0}{\nu} = 1 + \frac{u}{c}.$$

ν_0 är den frekvens som källan sänder ifrån sig fotoner med och ν är den frekvens som mäts i ett labb på jorden. Bestäm felet i % jämfört med den relativistiska formeln, för en stjärna som rör sig med $u = 0.01c$ ifrån jorden.

5.7 Alla frekvenser i vätespektrat från kvasaren 3C9 är tre gånger större i kvasarens vilosystem än i jordens vilosystem. Hur snabbt rör sig 3C9 från jorden?

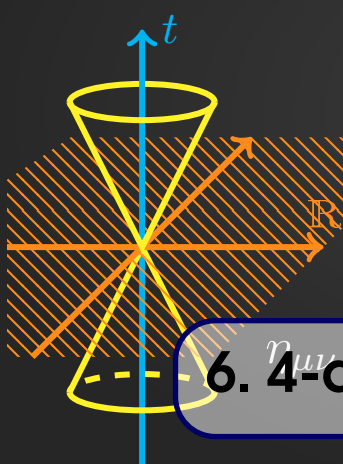
5.8 På ytan av en stjärna med yttemperatur T har väteatomer en genomsnittlig hastighet v , som ges av $(3/2)k_B T = (1/2)mv^2$. I sitt vilosystem har väte en spektrallinje med våglängden $\lambda_0 = 1215 \text{ \AA}$. Hur ser spektrumet ut på jorden?

Solens yttemperatur är $T = 5780 \text{ K}$. $k_B = 1.38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$. $m_H = 1.6726218 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

5.9 Jordens genomsnittliga avstånd från solen är cirka 150 miljoner kilometer. Den ekliptiska breddgraden av stjärnan Vega är ungefär 61 grader. Diskutera avvikelser i det ljus som kommer från Vega under ett år.

5.10 Låt oss titta närmare på tvillingarna Albert (A) och Bodil (B) och deras rymdresor. B reser fram och tillbaka med hastighet $3c/5$ (försumma accelerationsperioden) till en planet som ligger 9 ly borta från jorden. A stannar på jorden. A och B är i video kontakt med varandra under hela resan.

- Under Bs resan till planeten, vad ser A på skärmen (d.v.s. hur "snabbt" verkar tiden flöda för B enligt A)? Finns det någon skillnad med hur B ser A på sin skärm?
- Efter hur många år ser A på sin skärm att B har kommit fram till planeten?
- Hur mycket äldre ser B ut på As skärm när hon har kommit fram till planeten?
- Under Bs resa tillbaka, vad ser A på skärmen? Finns det någon skillnad med hur B ser A på sin skärm?
- Hur många år går enligt A mellan när han ser B lämna planeten och B är tillbaka på jorden?
- Hur mycket har B åldrats enligt A under resan tillbaka?
- Hur lång borta är planeten enligt B?
- Hur långt tid tar resan till planeten enligt B?
- Hur mycket äldre ser A ut på Bs skärm när hon har kommit fram till planeten?
- Hur långt tid tar resan tillbaka från planeten enligt B?
- Hur mycket har A och B åldrats när de träffar varandra igen?



$$\begin{aligned}
 x^\mu &= (t, \mathbf{r}) & c &= 1 & \eta'_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \\
 x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu & x^2 &= \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \begin{cases} > 0 \text{ "tidslik"} \\ = 0 \text{ "ljuslik"} \\ < 0 \text{ "rumslik"} \end{cases} & U^2 &= 1 \\
 x_\mu &= \eta_{\mu\nu} x^\nu & ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu & A^\mu A_\mu &= -\alpha^2 \\
 & & & & U^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(1, \mathbf{u}) \\
 & & A^\mu &= \frac{dU^\mu}{d\tau} = \gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\mathbf{u} + \gamma\mathbf{a}) & U^\mu V_\mu &= \gamma(v_{\text{rel}}) \\
 & & A^\mu U_\mu &= 0 & \text{Lorentz "boost"} & \\
 & & \eta_{\mu\nu} &= \begin{cases} +1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} & \Lambda^\mu_\nu &= \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6. 4-dimensionell notation

I detta kapitel kommer vi att diskutera hur vi beskriver olika storheter, som *skalärer*, *vektorer* och *tensorer* i relativitetsteori.

Vi börjar med det 3-dimensionella fallet, vilket egentligen är en repetition. Efter det fortsätter vi med den 4-dimensionella rumtiden, där kinematiska storheter som *4-hastighet* och *4-acceleration* kommer också att presenteras.

6.1 Skalärer, vektorer och tensorer i Euklidiskt 3D-rum

Låt oss börja med ett Euklidiskt 3-dimensionellt rum. Vi kan definiera olika storheter. Först har vi skalärer, som är kvantitet oberoende av valet av bas, till exempel temperatur eller tryck i en punkt, som beskrivs av ett tal. (I Kap. 8 kommer vi att generalisera alla dessa begrepp till ett fält som tar olika värden i olika punkter.) Inom Newtonsk mekanik är även tid och energi av en partikel skalärer.

Betrakta nu istället en punkt som relativt origo har koordinater $x^1 := x$, $x^2 := y$ och $x^3 := z$ och som är associerade med en *vektor* (ortvektor)

$$x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_i x^i \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i.$$

Vi kallar här *enhetsvektorerna* för $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$. I den sista likheten introducerade vi Einsteins summationskonvention.

Definition 6.1.1 — Einsteins summationskonvention. Två upprepade index, ett uppe och ett nere, innebär att man summerar över det indexet.

$$a^i b_i := \sum_i a^i b_i$$

Effektivt är det bara utelämnande av summationstecknet $\sum$. Index uppe kallas *kontravarianta* och index nere kallas *kovarianta*.

Vi kan skriva ett basbyte genom att låta $\mathbf{e}_i = L^j_i \mathbf{e}'_j \iff \mathbf{e}'_i = (L^{-1})^j_i \mathbf{e}_j$, där L är en inverterbar 3×3 -matris med invers L^{-1} . Vi vill att en vektor ska vara invariant, det vill säga identifiera samma

punkt oavsett basen: $x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{e}'_i$. Detta fodrar att $x^i = (L^{-1})^i_j x'^j$, eller ekvivalent

$$x'^i = L^i_j x^j. \quad (6.1)$$

Inom fysik används ofta denna sistnämnda egenskap (6.1), som definierande egenskap för vektorer. Invarians under basbyte innebär att vektorn är oberoende av valet av basvektorer. Observera att det inte är x^i som är invariant under basbyte utan $x^i \mathbf{e}_i$.

Säg att vi har två punkter A och B med koordinater $x^i_{(A)}$ respektive $x^i_{(B)}$ i rummet, det vill säga $A: (x^1_{(A)}, x^2_{(A)}, x^3_{(A)})$ och $B: (x^1_{(B)}, x^2_{(B)}, x^3_{(B)})$. Avståndet d mellan dessa ges av $d^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$, där $\Delta x^i = x^i_{(B)} - x^i_{(A)}$. Om vi vill skriva detta i Einsteins notation behöver vi införa ett objekt, nämligen Kroneckers delta

Definition 6.1.2 — Kroneckers delta.

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6.2)$$

Detta medför att avståndet d ges av $d^2 = \delta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j$. Faktum är att δ är vad som kallas för tensor, som vi snart kommer till, dock en speciell sådan.

Ofta vill vi begränsa oss till koordinatbyten som låter avståndet mellan punkter vara invariant. Om avståndet är invariant måste L uppfylla ett ytterligare krav:

$$d = d' \implies \delta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j = \delta_{ij} \Delta x'^i \Delta x'^j \stackrel{(6.1)}{=} \delta_{ij} \left(L^i_k \Delta x^k \right) \left(L^j_m \Delta x^m \right). \quad (6.3)$$

Det spelar inte någon roll vad indexen heter (vi summerar den), eller i vilken ordning L och Δx står. Vänsterledet i Ekvation (6.3) kan då skrivas $\delta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j$ eller $\delta_{km} \Delta x^k \Delta x^m$. Vi kan därmed skriva Ekvation (6.3) som

$$\delta_{km} \Delta x^k \Delta x^m = L^i_k L^j_m \delta_{ij} \Delta x^k \Delta x^m \implies \delta_{km} = L^i_k L^j_m \delta_{ij},$$

där implikationen följer av att vi kräver att avstånd är invariant för alla möjliga värden Δx . Villkoret kan även skrivas $LL^T = \mathbf{1}$, som kanske är mer bekant, matriser som uppfyller detta är ortogonala. De transformerar ortonormala vektorer $\mathbf{e}_i$ till ortonormala vektorer $\mathbf{e}'_i$, och geometriskt motsvaras de av rotationer.

Tensorer är ett begrepp som generaliserar skalärer, vektorer och matriser. De karakteriseras av komponenter med flera index.

Definition 6.1.3 — Tensor. En tensor av typ (p, q) , kovarianta respektive kontravarianta index, rank $n = p + q$, är ett multidimensionellt objekt som transformeras enligt

$$T'^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_p} = L^{j_1}_{k_1} \dots L^{j_p}_{k_p} \left(L^{-1} \right)^{m_1}_{i_1} \dots \left(L^{-1} \right)^{m_p}_{i_p} T^{k_1 \dots k_p}_{m_1 \dots m_p}. \quad (6.4)$$

Där varje index löper över respektive dimension.

Här ser vi att det är skillnad på kovarianta och kontravarianta index. Vi kommer främst betrakta tensorer av rank 0 vilka är skalärer, rank 1 som beskrivs av vektorer, och rank 2 vilka beskrivs av matriser, men även tensorer av högre rank används i vissa tillämpningar.

■ **Exempel 6.1** Ett exempel på en tensor av rank 2, där båda indexen löper över rummet, är 3×3 -matrisen som vi här kallar K i *Hookes generaliserade lag*.

$$\epsilon_i = K_{ij} \sigma^j$$

Här är ϵ_i deformation längs i -axeln och σ^j spänningen längs j -axeln. Den som läst hållfasthetslära har använt sig av Hookes lag, såväl som spänningstensorn. ■

När vi nu har definierat tensorer inser vi att Kroneckers delta, beskriven av Ekvation (6.2), är en tensor med två kovarianta index, men den är mycket speciell. δ är invariant under ortogonala transformationer, det vill säga rotationer. Med andra ord gäller $\delta_{ij} = \delta'_{ij}$.

Alternativt, kan vi vända på definitionen och säga att ortogonala transformationer definieras som de som lämnar δ_{ij} invariant. Detta gäller även $\delta^{ij} = \delta'^{ij}$. Däremot är tensorn δ_j^i invariant under alla invertbara basbyte, inte bara ortogonala: $\delta_j^i = L_m^i (L^{-1})_j^m = L_m^i (L^{-1})_j^m = \delta_j^i$.



Att vi har en invariant tensor innebär att vi kan "höja" och "sänka" index genom att definiera, till exempel, för en vektor $a_i = \delta_{ij} a^j$. Med detta tillåts vi skriva skalärprodukt på flera ekvivalenta sätt.

$$a \cdot b = \delta_{ij} a^i b^j \equiv a_i b^i \equiv a^i b_i \equiv \delta^{ij} a_i b_j \quad (6.5)$$

6.2 Enheter $c=1$

Innan vi kastar oss in i den 4-dimensionella världen ska vi ta itu med ljushastigheten. Enligt Einsteins andra postulat (2.1.1) är ljusets hastighet i vakuum konstant. Idag definieras enheten meter så att $c = 299\,792\,458$ m/s, i alla inertialsystem, alltså definieras nu enheten meter utifrån ljushastigheten och inte tvärtom.

Eftersom c är konstant, kan vi välja att se på den lite annorlunda genom att byta enheter. Genom att definiera "ljussekund" som en enhet för längd kan vi förenkla alla ekvationer i speciella relativitetsteorin.

Definition 6.2.1 En ljussekund (ls) := den sträcka ljuset färdas genom vakuum på en sekund. Om vi använder enheterna sekund och ljussekund så blir $c = 1$, där man alltid försummar att skriva ls/s vilket är praktiskt i många räkningar.

Nu behöver vi inte längre släpa på det långa $c = 299\,792\,458$ m/s, vilket bara påminner om ett telefonnummer. Det är dock viktigt att poängtera att detta byte utförts och att det sker konsekvent i alla räkningar så det inte blir dimensionsfel. I resten av kompendiet kommer vi alltid välja $c = 1$, för att ekvationerna ska bli mer koncisa.

6.3 Skalärer, vektorer och tensorer i Minkowski 4D-rumtid

Som vi såg redan i Kapitel 1 och 2 måste vi ta hänsyn till tid mellan olika referenssystem. Detta gör vi genom att inkludera tid som en koordinat. Vi har även sett i Kapitel 3 att avstånd inte är invariant vid Lorentztransformationen. Precis som i det 3-dimensionella fallet finns det inom den 4-dimensionella världen skalärer, som inte beror på valet av bas. Vektorer å andra sidan behöver vi ändra på, vi måste ha med tiden som en fjärde koordinat. Inom relativitetsteori är konventionen att använda sig av grekiska bokstäver istället för latinska: $i, j, k, \dots \rightarrow \mu, \nu, \rho, \dots$ vid indexering.

Definition 6.3.1 — 4-vektor. En vektor på formen

$$V^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \Longrightarrow \quad V^\mu := (v^0, v^1, v^2, v^3).$$

kallas för en kontravariant 4-vektor. v^0 kallas för tid-komponent.

Låt oss beteckna en allmän Lorentztransformation med Λ_ν^μ , vilket motsvarar L_i^j , och kan beskrivas med en 4×4 -matris. Lorentztransformation i rumtid kan jämföras med rotation i det Euklidiska rummet i den meningen att den har motsvarande egenskaper, nämligen att transformera vektorer och tensorer mellan olika referenssystem och att lämna en viss storhet (distans eller intervall) invariant.

6.3.1 — Lorentztransformation i 4D-notation. En godtycklig vektor V^μ transformeras som

$$V'^\mu = \Lambda_\nu^\mu V^\nu \iff V^\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu_\nu V'^\nu. \quad (6.6)$$

För en godtycklig tensor $T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q}$ gäller att

$$T_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda_{\rho_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\rho_q}^{\nu_q} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\sigma_1}_{\mu_1} \dots \left(\Lambda^{-1}\right)^{\sigma_p}_{\mu_p} T_{\sigma_1 \dots \sigma_p}^{\rho_1 \dots \rho_q}. \quad (6.7)$$

Definition 6.3.2 — Händelse i rumtid. En händelse i rumtid beskrivs av vektorn

$$x^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \Longrightarrow \quad x^\mu := (t, x, y, z).$$

Notera att $\mu = 0, 1, 2, 3$, detta innebär att $x^{1,2,3} = (x, y, z)$ som i det 3-dimensionella fallet och den tillförda nollte koordinaten är $x^0 = t$ (i $c = 1$ enheter).

Av Ekvation (6.7) framgår det att kovarianta och kontravarianta index transformeras olika, liksom fallet vi hade i 3D i Ekvation (6.4). Om systemen är i standardkonfiguration, exempelvis i Figur 1.1, kan Lorentztransformationen av en händelse med matriser och vektorer skrivas enligt

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Ekvation (6.8) beskriver en så kallad “boost” längs x -axeln. Vi kan skriva liknande uttryck för “boosts” längs y -axeln, såväl som z -axeln. Genom att kombinera “boosts” och rotationer kan en godtycklig Lorentztransformation skrivas.

6.4 Intervall mellan två händelser

Säg att vi har två händelser A och B i rumtiden med koordinater $x_{(A)}^\mu$ respektive $x_{(B)}^\mu$. I relativitetsteori är inte avståndet Lorentzinvariant, däremot är intervallet, Δs , invariant, vilket visades i Kapitel 2.6. Δs uppfyller ekvationen

$$\Delta s^2 = \left(\Delta x^0\right)^2 - \left(\Delta x^1\right)^2 - \left(\Delta x^2\right)^2 - \left(\Delta x^3\right)^2,$$

där $\Delta x^\mu = x_{(B)}^\mu - x_{(A)}^\mu$. För att skriva detta med Einsteins notation krävs att vi inför en tensor.

Definition 6.4.1 — Minkowskimetriken¹.

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad \text{eller} \quad \eta := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Intervall kan nu skrivas enligt $\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$, eller ekvivalent på differentiell form enligt följande.

Definition 6.4.2 — Intervall i Minkowski 4D-rumtid.

$$ds^2 := \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Eftersom ds^2 är invariant så gäller

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (6.9)$$

Med Lorentztransformationen (6.6) kan vi skriva vänsterledet i Ekvation (6.9) som

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\sigma\rho} dx'^\sigma dx'^\rho = \eta_{\sigma\rho} \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\rho dx^\mu dx^\nu.$$

Då Ekvation (6.9) skall gälla för alla dx följer att

$$\Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\rho \eta_{\sigma\rho} = \eta_{\mu\nu}$$

Tensorn η är alltså Lorentzinvariant.

I speciell relativitetsteori kan vi använda $\eta_{\mu\nu}$ eller $\eta^{\mu\nu}$ för att höja/sänka index. Notera att detta innebär att $\eta_\mu^\nu = \eta_{\mu\rho} \eta^{\rho\nu} \equiv \delta_\mu^\nu$.

6.5 Lorentzprodukt, tidslika, ljuslika och rumslika vektorer

När vi nu har definierat vad en 4-vektor är kan vi börja klassificera dessa samt undersöka olika algebraiska och geometriska egenskaper hos dessa klasser. Vi har tidigare sett att ett litet intervall ds^2 är invariant under Lorentztransformationen och börjar nu med att presentera ytterligare ett invariant begrepp, nämligen *Lorentzprodukten*, ibland kallad *4-skalarprodukten*. Det är en analogi till den 3-dimensionella skalärprodukten i den bemärkelsen att man "multipliserar" två 4-vektorer och får ut en skalär, som är invariant. Dock behandlas tids- och rumskoordinater annorlunda på grund av Minkowskimetriken. För två godtyckliga 4-vektorer $A^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ och $B^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ definieras Lorentzprodukten enligt följande.

Definition 6.5.1 — Lorentzprodukt.

$$A \cdot B := A^\mu B_\mu := \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = a^0 b^0 - (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3) \quad (6.10)$$

Notera tecknet mellan produkten av de nollte komponenterna och de övriga.



Notera att vi med hjälp av Minkowskimetriken kan höja och sänka index. Det betyder att vi lika gärna kan skriva om Definition 6.5.1 enligt $\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A_\nu B^\nu = A^\mu B_\mu$, precis som i det 3-dimensionella fallet i Ekvation (6.5). Viktigt att tänka på är att om vi inte väljer att skriva ut tensorn $\eta^{\mu\nu}$ eller $\eta_{\mu\nu}$ och istället höjer eller sänker det ena indexet försvinner tecknet framför de tre sista komponenterna, eftersom det är inbakat i höjningen och sänkningen. Det innebär att $A^\mu B_\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3$ och $A_\mu B^\mu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$. (Plus tecken överallt, ty $a_1 = \eta_{1\mu} a^\mu = \eta_{11} a^1 = -a^1$.)

¹Det förekommer andra definitioner, till exempel $-\eta$ enligt ovanstående.

Med matrisnotation kan vi skriva Lorentzprodukten som

$$\eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = \begin{bmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix},$$

där den mittersta matrisen är den använda metriken $\eta_{\mu\nu}$. Genom matrismultiplikation fås precis Ekvation (6.10).

Vi kan nu visa explicit invariansen hos produkten under Lorentztransformation. Låt oss starta med Lorentzprodukten mellan två godtyckliga 4-vektorer i ett inertialsystem S och sedan transformera varje komponent enligt Lorentztransformationen (2.4) till ett inertialsystem S' i standardkonfiguration. Vi visar alltså att $A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu$ enligt

$$\begin{aligned} A'^\mu B'_\mu &= a'^0 b'^0 - (a'^1 b'^1 + a'^2 b'^2 + a'^3 b'^3) \\ &= \gamma (a^0 - v a^1) \gamma (b^0 - v b^1) - \gamma (a^1 - v a^0) \gamma (b^1 - v b^0) - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\ &= \gamma^2 (a^0 b^0 - v a^1 b^0 - v a^0 b^1 + v^2 a^1 b^1 - a^1 b^1 + v a^1 b^0 - v a^0 b^1 + v^2 a^0 b^0) - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\ &= \gamma^2 (1 - v^2) a^0 b^0 - \gamma^2 (1 - v^2) a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\ &= a^0 b^0 - (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3) = A^\mu B_\mu, \end{aligned}$$

där vi i näst sista steget utnyttjade att $\gamma^2 = 1/(1 - v^2)$. Därmed är Lorentzprodukten Lorentzinvariant, vilket är ett kraftfullt verktyg vid lösning av relativistiska problem.

Definition 6.5.2 — Lorentzkvadraten. Ett intressant fall av Lorentzprodukten är när man tar Lorentzprodukten med en vektor och den själv.

$$A^2 := A^\mu A_\mu = (a^0)^2 - ((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2) \quad (6.11)$$

Vi väljer att definiera det som *Lorentzkvadraten*.

Från Definition 6.5.1 kan vi komma fram till följande resultat.

■ **Exempel 6.2** För tre godtyckliga 4-vektorer A^μ , B^μ och C^μ gäller följande.

$A^\mu B_\mu = B^\mu A_\mu$	Kommutativitet
$A^\mu (B_\mu + C_\mu) = A^\mu B_\mu + A^\mu C_\mu$	Associativitet
$d(A^\mu B_\mu) = (dA^\mu) B_\mu + A^\mu (dB_\mu)$	Produktregeln

I den sista ekvationen betecknar “d” en differential. ■

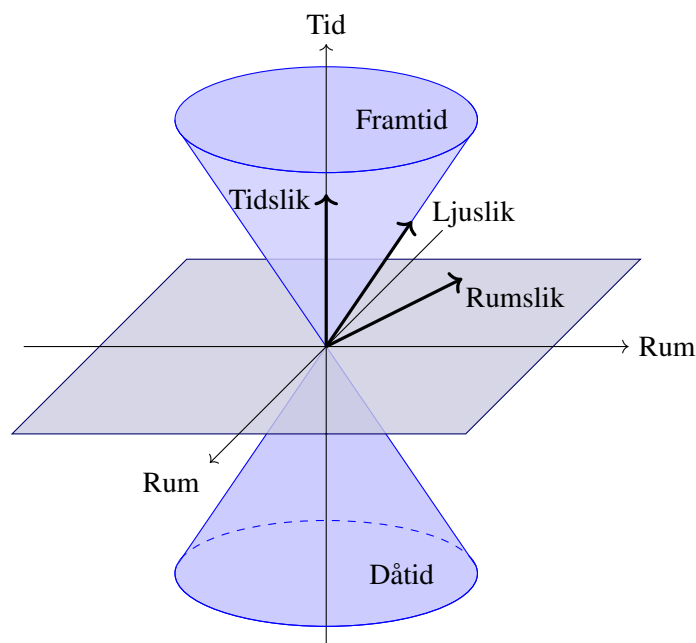
I Kapitel 2.5 beskrevs ett tvådimensionellt Minkowskidiagram som symboliserade rumtiden, men bara med en rumslig dimension. Vi vill kunna illustrera ett 4-dimensionellt Minkowskidiagram och därmed få med tre rumsliga dimensioner, men detta är svårt att göra på ett 2-dimensionellt papper. Det är dock enklare att illustrera ett 3-dimensionellt Minkowskidiagram, med två rums- och en tidsdimension. De rumsliga, ljuslika och tidslika vektorerna i Definition 6.5.3 har olika geometriska betydelser i ett sådant diagram. Detta illustreras i Figur 6.1, vilket är ett 3-dimensionellt Minkowskidiagram.

Vi kan klassificera 4-vektorer utifrån tecknet på deras Lorentzkvadrat.

Definition 6.5.3 — Klassifikation av 4-vektorer.

$$A^2 = A^\mu A_\mu \begin{cases} > 0 & \Rightarrow A^\mu \text{ Tidslik} \\ = 0 & \Rightarrow A^\mu \text{ Ljuslik} \\ < 0 & \Rightarrow A^\mu \text{ Rumslik} \end{cases}$$

Notera att denna klassifikation gäller i alla inertialsystem eftersom Lorentzprodukter är Lorentzinvarianta.



Figur 6.1: Figuren illustrerar ett Minkowskidiagram i tre dimensioner, två rumsliga och en tidsdimension. Planet svarar mot tiden $t = 0$, alltså nutid enligt en observatör i origo. Vektorer som har en positiv tidskoordinat pekar alltså i framtid och vektorer som har en negativ tidskoordinat pekar i dåtid. De två konerna i figuren är så kallade *ljuskoner*, vilka illustrerar hur 4-vektorer klassificeras i Definition 6.5.3. Tidslika vektorer ligger innanför konen, ljuslika längs med konen och rumslika utanför konen.

De tidslika vektorerna pekar alltså innanför ljuskonen, ljuslika ligger längs konens rand och rumslika pekar utanför konen. Vektorernas position på ljuskonen relativt en observatör i origo är alltså det som bestämmer klassifikationen i fallet då A^μ är rumtidskoordinaten för en händelse.

Om vi minns Kapitel 2.5 igen, då i en dimension, motsvaras händelser som ligger längs ljuskonen med $t > 0$ av händelser som kan nås om man skickar en ljussignal från Origo, eftersom lutningen på konen är precis c . Alla händelser utanför konen kan därmed inte påverkas av Origo och kallas för “rumsseparerade”. Det omvända gäller för vektorer innanför konen, som alltså inte kräver överljushastigheter och således kan påverkas av en signal från Origo efter en godtycklig tid. De är därmed “tidsseparerade”. Denna tolkning leder oss till slutsatsen att tids- och ljuslika vektorer båda kan klassas som “kausala” vektorer.

I Kapitel 4.4 beskrevs det momentana vilosystemet, som kan förenkla beskrivningar av vektorer som hastighet och acceleration. Denna förenkling är även möjlig för 4-vektorer där de rumsliga koordinaterna kan transformeras med en rotation till momentana vilosystemet.

■ **Exempel 6.3 — Tidslika, ljuslika, rumslika vektorer.**

Notera att för en vektor A^μ som är

$$\begin{cases} \text{tidslik } A^2 > 0 \exists \text{ ett inertialsystem där } A^\mu = (a, 0, 0, 0) \\ \text{ljuslik } A^2 = 0 \exists \text{ ett inertialsystem där } A^\mu = (a, a, 0, 0) \\ \text{rumslig } A^2 < 0 \exists \text{ ett inertialsystem där } A^\mu = (0, a, 0, 0) \end{cases}$$

Här motsvarar a ett godtyckligt värde på en av komponenterna. Kontrollera gärna att dessa förenklingar uppfyller Definition 6.5.3 för vardera fall genom att använda Ekvation (6.11). Detta resultat kan vara mycket användbart vid problemlösning. ■

6.6 4-hastigheten

Med algebran och geometrin bakom 4-vektorer i minnet kan vi nu studera kinematiken. Först beskriver vi 4-hastigheten. Analogt med tre dimensioner ser vi hastigheten som förändringen i position med avseende på tiden, men nu måste vi använda den invarianta egentiden τ som uppfyller

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Notera att $c = 1$, annars hade det varit ett c^2 framför termerna dt^2 och $d\tau^2$. τ är tidskoordinaten i en partikels vilosystem, därför är dess rumsliga koordinater där noll.

Definition 6.6.1 — 4-hastighet. Låt τ vara den invarianta egentiden. Då definieras 4-hastighet enligt

$$U^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

För att ta fram ett uttryck för 4-hastigheten utnyttjas följande samband.

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = \sqrt{1 - u^2} = \frac{1}{\gamma} \quad (6.12)$$

Med hjälp av omskrivningen i Ekvation (6.12) kan 4-hastigheten skrivas som

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}(t, x, y, z) = \gamma(1, u_x, u_y, u_z) = \gamma(1, \mathfrak{u}), \quad (6.13)$$

där $\mathfrak{u}$ är den vanliga 3-dimensionella hastigheten.

En intressant egenskap hos 4-hastigheten i det momentana vilosystemet, där $\mathfrak{u} = \mathbb{0}$, är följande.

6.6.1 — U^μ i det momentana vilosystemet.

$$U^\mu = \gamma(1, \mathfrak{u}) = (1, \mathbb{0}) \implies U^2 = 1 \quad (6.14)$$

I det andra steget utnyttjades att $\mathfrak{u} = \mathbb{0} \implies \gamma = 1$. I det momentana vilosystemet är alltså U^μ alltid tidslik. Den fysikaliska tolkningen av att dess tidskoordinat är positiv är att man aldrig kan låta bli att förflytta sig i tidens riktning.

OBS! Eftersom Lorentzprodukter är Lorentzinvarianta så måste $U^2 = 1$ i alla inertialsystem.

Den relativa hastigheten mellan två partiklar med godtyckliga 4-hastigheter U och V kan tas fram med ett liknande resonemang. Tänk dig att vi har två partiklar som rör sig med hastigheterna $\mathfrak{u}$ respektive $\mathfrak{v}$. Säg att vi befinner oss i den ena partikelns momentana vilosystem, den med 4-hastighet $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, där den andra partikeln har hastigheten $\mathfrak{v}_{\text{rel}}$ relativt den första partikeln. Den andra partikelns gammafaktor är alltså $\gamma(v_{\text{rel}})$ i den första partikelns vilosystem. Då blir Lorentzprodukten mellan partiklarnas 4-hastigheter följande.

6.6.2 — Relativa hastigheten uttryckt med 4-hastigheter.

$$U^\mu V_\mu = (1, \mathbf{0}) \cdot \gamma(v_{\text{rel}}) (1, \mathbf{v}_{\text{rel}}) = \gamma(v_{\text{rel}}) \quad (6.15)$$

Precis som i fallet med $U^2 = 1$ måste $U^\mu V_\mu = \gamma(v_{\text{rel}})$ gälla i alla inertialsystem.

6.7 4-accelerationen

4-accelerationen kan definieras analogt med hastigheten i föregående avsnitt genom att derivera hastigheten med avseende på den invarianta egentiden τ .

Definition 6.7.1 — 4-acceleration. Låt τ vara den invarianta egentiden. Då definieras 4-acceleration enligt

$$A^\mu := \frac{dU^\mu}{d\tau}.$$

På samma sätt som för 4-hastigheten utnyttjas nu Ekvation (6.12) för att ta fram ett uttryck för 4-accelerationen.

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dU^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma, \gamma \mathbf{u}) = \gamma (\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \mathbf{u} + \gamma \mathbf{a}) \quad (6.16)$$

Här är $\mathbf{a}$ den vanliga 3-dimensionella accelerationen och $\dot{\gamma}$ tidsderivatan av Lorentzfaktorn, som kan förenklas enligt följande.

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{u\dot{u}}{(1-u^2)^{3/2}} = \gamma^3 u \dot{u} = \gamma^3 \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \quad (6.17)$$

(Den sista likheten följer från tidsderivatan av $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.)

Med hjälp av omskrivningen i Ekvation (6.17) kan vi skriva 4-accelerationen i Ekvation (6.16) som

$$A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \gamma (\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \mathbf{u} + \gamma \mathbf{a}) = \gamma^2 \left(\gamma^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}, \gamma^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u} + \mathbf{a} \right). \quad (6.18)$$

Från Ekvation (6.18) noterar vi att accelerationen i det momentana vilosystemet blir följande.

6.7.1 — A^μ i det momentana vilosystemet.

$$A^\mu = (0, \mathbf{a})$$

Vi utnyttjade att i det momentana vilosystemet $\mathbf{u} = 0$. Till skillnad från U^μ kan A^μ bli 0 men endast om $\mathbf{a} = 0$.

Från A^μ och U^μ i det momentana vilosystemet följer ett annat intressant exempel. Om A^μ och U^μ är 4-hastighet respektive acceleration i för en partikel i dess momentana vilosystem blir Lorentzprodukten mellan dessa följande.

6.7.2 — Lorentzprodukt av acceleration och hastighet.

$$A^\mu U_\mu = \gamma (\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \mathbf{u} + \gamma \mathbf{a}) \cdot \gamma (1, \mathbf{u}) = (0, \mathbf{a}) \cdot (1, \mathbf{0}) = 0 \quad (6.19)$$

Återigen noterar vi att Lorentzinvariansen medför att detta gäller i alla inertialsystem.

6.7.1 Egenaccelerationen

Vidare kan nu kvadraten av A^μ beräknas.

■ **Exempel 6.4 — Kvadraten av A^μ .** Med 4-accelerationen A^μ från Ekvation (6.18) erhålls

$$\begin{aligned}
 A^\mu A_\mu &= \gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\mathfrak{u} + \gamma\mathfrak{a}) \cdot \gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\mathfrak{u} + \gamma\mathfrak{a}) \\
 &= \gamma^2 \left(\dot{\gamma}^2 - (\dot{\gamma}\mathfrak{u} + \gamma\mathfrak{a})^2 \right) \\
 &= \gamma^2 \left(\dot{\gamma}^2 - \left(\dot{\gamma}^2 \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u} + 2\dot{\gamma}\gamma\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a} + \gamma^2 \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \right) \right) \\
 &= \gamma^2 \left(\dot{\gamma}^2 (1 - \mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}) - 2\dot{\gamma}\gamma\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a} - \gamma^2 \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \right) \\
 &= \gamma^2 \left(\dot{\gamma}^2 (1 - u^2) - 2\dot{\gamma}\gamma\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a} - \gamma^2 a^2 \right) \\
 &= \gamma^2 \left(\dot{\gamma}^2 / \gamma^2 - 2\dot{\gamma}\gamma\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a} - \gamma^2 a^2 \right) \\
 &= \gamma^2 \left(\gamma^6 (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a})^2 / \gamma^2 - 2\gamma\gamma^3 (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a})^2 - \gamma^2 a^2 \right) \\
 &= \gamma^2 \left(\gamma^4 (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a})^2 - 2\gamma^4 (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a})^2 - \gamma^2 a^2 \right) \\
 &= -\gamma^6 (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a})^2 - \gamma^4 a^2.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Vi kan nu utnyttja vektoridentiteten $(\mathfrak{u} \times \mathfrak{a})^2 = u^2 a^2 - (\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a})^2$ för att skriva om det på en annan form, innehållande en kryssprodukt.

$$\begin{aligned}
 A^\mu A_\mu &= \gamma^6 (\mathfrak{u} \times \mathfrak{a})^2 - \gamma^6 u^2 a^2 - \gamma^4 a^2 \\
 &= \gamma^6 (\mathfrak{u} \times \mathfrak{a})^2 - \gamma^4 a^2 (1 + \gamma^2 u^2) \\
 &= \gamma^6 (\mathfrak{u} \times \mathfrak{a})^2 - \gamma^4 a^2 \left(1 + \frac{u^2}{1 - u^2} \right) \\
 &= \gamma^6 (\mathfrak{u} \times \mathfrak{a})^2 - \gamma^4 a^2 \frac{1 - \cancel{u^2} + \cancel{u^2}}{1 - u^2} \\
 &= \gamma^6 (\mathfrak{u} \times \mathfrak{a})^2 - \gamma^6 a^2
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

■

Om vi nu går till det momentana vilosystemet ($\mathfrak{u} = 0$ och $\gamma = 1$) kan vi från Ekvation (6.20) eller (6.21) definiera egenaccelerationen.

■ **Definition 6.7.2 — Egenacceleration.** Egenaccelerationen α definieras (i beloppet) enligt

$$\alpha^2 := -A^\mu A_\mu. \tag{6.22}$$

OBS! Notera att minustecken beror på att $\mathfrak{u} = 0 \implies A^\mu = (0, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \implies A^\mu A_\mu = -\alpha^2$.

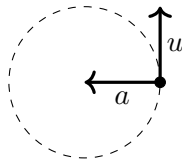
Vi kan också visa att båda sätt att beskriva egenaccelerationen i Ekvation (6.20) och (6.21) förenklas till bara en term om vi undersöker de fall då accelerationen och hastigheten är parallella (rätlinjig rörelse) eller om de är ortogonala (cirkelrörelse). Fallen illustreras i Figur 6.2. För det parallella fallet har vi alltså $\mathfrak{u} \times \mathfrak{a} = 0$ och för det ortogonala fallet har vi $\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{a} = 0$. Därmed erhålls följande användbara resultat.

6.7.3 — Egenacceleration för cirkelrörelse respektive rätlinjig rörelse.

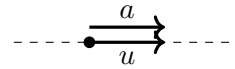
$$\alpha^2 = -A^\mu A_\mu = \begin{cases} \text{Cirkelrörelse:} \\ \gamma^4 a^2 + \gamma^6 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2 = \{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0\} = \gamma^4 a^2 & \implies \alpha = \gamma^2 a \\ \text{Rätlinjig rörelse:} \\ \gamma^6 a^2 - \gamma^6 (\mathbf{u} \times \mathbf{a})^2 = \{\mathbf{u} \times \mathbf{a} = 0\} = \gamma^6 a^2 & \implies \alpha = \gamma^3 a \end{cases} \quad (6.23)$$

Egenaccelerationen skiljer sig alltså med en Lorentzfaktor för cirkelrörelse och rätlinjig rörelse. För cirkelrörelse gäller $\alpha = \gamma^2 a$ och för rätlinjig rörelse gäller $\alpha = \gamma^3 a$.

Ortogonal rörelse:



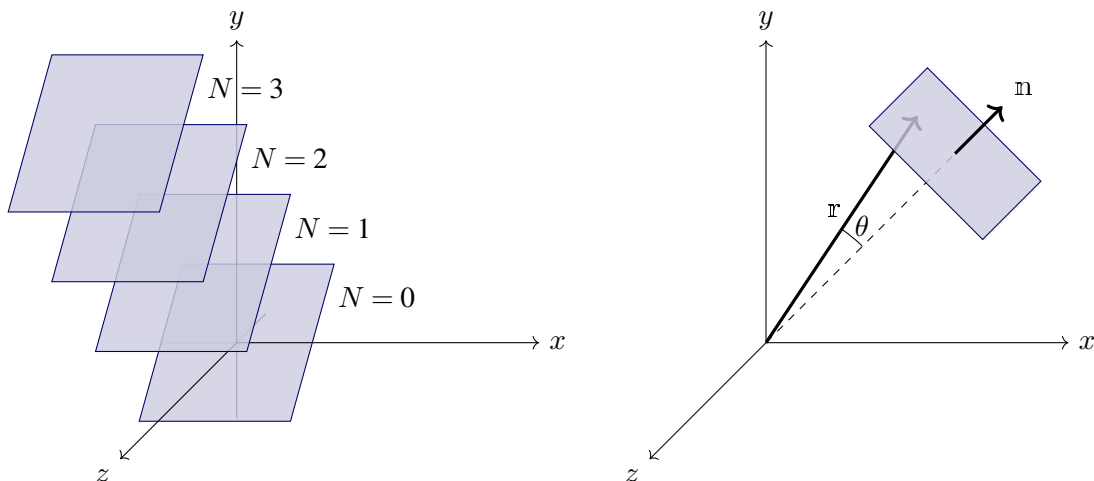
Rätlinjig rörelse:



Figur 6.2: Figuren illustrerar två fall då accelerationen och hastigheten är ortogonala respektive parallella med varandra. Uttrycket för egenaccelerationen för de två olika fallen förenklas då till Ekvation (6.23).

6.8 4-vågvektorn

Den sista vektorn vi vill introducera är den så kallade *4-vågvektorn*, som beskriver rörelser hos vågor i rumtiden istället för partiklar. Tänk dig en uppsättning plan där varje plan har en hel våglängds avstånd mellan sig. Låt N representera ett sådant plan, vilket alltså motsvarar en av vågens toppar. För en hel uppsättning plan blir det alltså ett “våg-tåg”, likt Figur 6.3, som alla propagerar i samma riktning, nämligen riktningen för planens normaler. Från linjär algebra minns vi planets ekvation, att alla punkter $\mathbf{r}$ som uppfyller $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$ beskriver ett plan ortogonalt mot normalen med avstånd d från origo.



Figur 6.3: Till vänster i figuren beskrivs en uppsättning plan som indexeras med N . Dessa motsvarar de olika vågtopparna hos en våg som alla har en våglängdsavstånd λ mellan sig. Till höger illustreras en punkt $\mathbf{r}$, vinkeln θ och normalen $\mathbf{n}$ på ett sådant plan.

Säg nu att planen rör sig med en hastighet w i normalens riktning. Om planet börjar i origo kommer den efter tiden t att befinna sig på ett avstånd $d = wt$ från origo. Eftersom varje plan, som vi indexerade med $N \in \mathbb{Z}$, har en hel våglängds avstånd mellan sig kan vi beskriva avståndet som alla plan har till origo enligt

$$d = wt + N\lambda.$$

Detta innebär att vi kan beskriva en punkt på ett rörligt plan enligt

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - wt = N\lambda,$$

eller för två generell punkter på två olika plan

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - w\Delta t &= \Delta N\lambda \\ \implies \frac{1}{\lambda} \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\lambda} w\Delta t &\in \mathbb{Z} \\ \implies \frac{1}{\lambda} \left(w\Delta t - \Delta x \cdot n^1 - \Delta y \cdot n^2 - \Delta z \cdot n^3 \right) &\in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vi har nu alltså lyckats beskriva vågens position i rummet. Precis som tidigare vill vi nu ge ett manifest relativistiskt invariant uttryck genom att skapa en 4-vektor K_μ som uppfyller $K_\mu \Delta x^\mu \in \mathbb{Z}$. Vi definierar 4-vågvektorn enligt följande.

Definition 6.8.1 — 4-vågvektor.

$$K_\mu := \frac{1}{\lambda} \left(w, n^1, n^2, n^3 \right) = \frac{1}{\lambda} (w, \mathbf{n}) \implies K_\mu \Delta x^\mu \in \mathbb{Z} \quad (6.24)$$

OBS! Notera att vi direkt från Ekvation (6.24) kan visa att K_μ är en kovariant 4-vektor. Eftersom vi vet att Δx^μ är en kontravariant 4-vektor och ΔN är en skalär (invariant) innebär det att K_μ måste vara just en kovariant 4-vektor.

Genom att bryta ut ett w från alla komponenter i Ekvation (6.24) kan vi beskriva 4-vågvektorn i termer av dess frekvens, istället för dess hastighet, genom sambandet $\nu = w/\lambda$ enligt

$$K_\mu = \nu (1, \mathbf{n}/w).$$

Tolkningen av 4-vågvektorn i rumtiden är att den beskriver de händelser som passerar den aktuella vågtoppens yta.

6.9 Lorentzinvarians vid problemlösning

I Kapitel 6 har vi bland annat undersökt 4-vektorer och sett att de är kraftfulla verktyg för att beskriva kinematik eftersom Lorentzprodukten i Ekvation (6.10) är Lorentzinvariant. Lorentzprodukten antar alltså samma värde i alla inertialsystem. Några exempel på detta är Ekvation (6.14), (6.15), (6.19) och (6.22). Vi kan därmed välja det enklaste inertialsystemet, vilket oftast är det momentana vilosystemet, för att försöka lösa det aktuella problemet, vilket kan underlätta beräkningarna avsevärt. Detta är något som kommer att utnyttjas mycket i resterande delen av kompendiet och är värt att lägga på minnet.

6.10 Övningsuppgifter

6.1 Indikera vilken, eller vilka, av följande tensorekvationer som inte kan vara matematiskt korrekta med avseende på Lorentztransformationen.

- (a) $\eta_{\mu\nu} X^\mu = X_\nu$
- (b) $A_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho B_\nu$
- (c) $V^{\mu\nu\rho} = 196883$
- (d) $V^{\mu\nu\rho} = 0$
- (e) $\delta_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$
- (f) $V^{\mu\nu\rho} U_{\mu\sigma\kappa} = Y^\mu{}_{\sigma\kappa}$

6.2 Låt oss enbart för denna uppgift betrakta ett rum med d dimensioner. Låt latinska versaler vara index $I, J, \dots \in \{1, \dots, d\}$. Hur många oberoende komponenter har då en...

- (a) ... $(2,0)$ -tensor A^{IJ} ?
- (b) ... symmetrisk $(2,0)$ -tensor B^{IJ} (som uppfyller $B^{IJ} = B^{JI}$)?
- (c) ... antisymmetrisk $(2,0)$ -tensor C^{IJ} (som uppfyller $C^{IJ} = -C^{JI}$)?
- (d) ... fullständigt antisymmetrisk $(3,0)$ -tensor D^{IJK} ?
- (e) ... fullständigt antisymmetrisk $(d,0)$ -tensor $E^{I_1 I_2 \dots I_d}$?

Tips: En fullständigt antisymmetrisk tensor byter tecken vid platsbyte av två index. Förekommer samma index två gånger i en komponent är därför den komponenten noll.

6.3 Betrakta 4-tensorn $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, fullständigt antisymmetrisk som uppfyller $\epsilon^{0123} = 1$.

- (a) Visa att alla andra komponenter av $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ kan härledas utifrån antisymmetri.
- (b) Visa att $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ är en invariant tensor under en Lorentztransformation Λ , det vill säga

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Tips: $\det \Lambda = 1$.

6.4 En generell 4-vektor kan anges med komponenter (v^0, v^1, v^2, v^3) , där vi antar att $v^{0,1,2,3}$ bara är dimensionslösa tal. Ge exempel på:

- (a) Två rumslika vektorer vars summa är tidslik.
- (b) Två ljuslika vektorer vars summa är tidslik.
- (c) Två tidslika vektorer vars summa är tidslik.
- (d) Två rumslika vektorer vars summa är rumslik.
- (e) Två Lorentz-ortogonala vektorer.

6.5 Vilka av dessa 4-vektorer pekar i framtidsljuskonen, dåtidsljuskonen, eller i presens?

- (a) $V_1 = (1, 2, -2, 0)$
- (b) $V_2 = (-2, 1, -2, 0)$
- (c) $V_3 = (1, -2, 1, 0)$
- (d) $V_1 + V_3$
- (e) $V_2 - V_1$
- (f) $V_1 + V_2 + V_3$

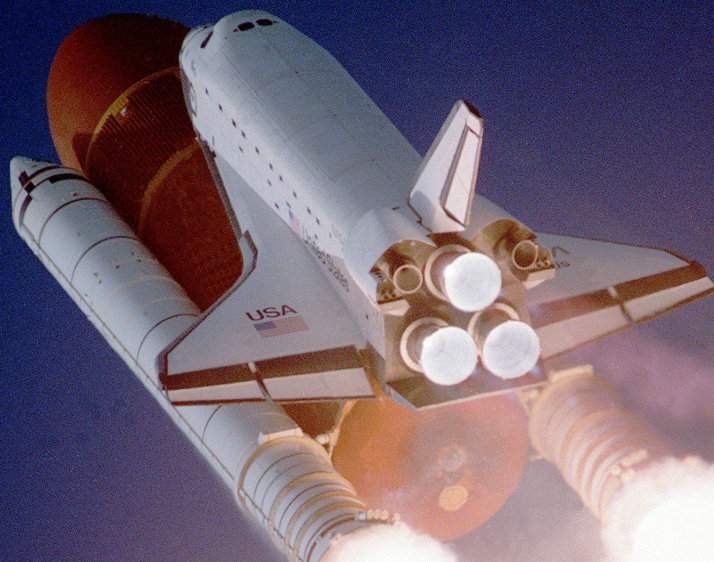
6.6 Låt U^μ vara en 4-hastighet, A^μ den associerade 4-accelerationen samt ϕ en skalär så att

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \phi U^\mu. \quad (6.25)$$

Visa att Ekvation (6.25) ovan medför att $\alpha = \sqrt{\phi}$, där α är egenaccelerationen.

6.7 Elektroner cirkulerar med en gammafaktor $\gamma = 2.0 \cdot 10^5$ vid LEP-acceleratorn, en cirkulär partikelaccelerator med radie 4.3 km. Vad är deras egenacceleration?

6.8 En partikel rör sig i ett inertialsystem enligt $x = C_x t$ och $y = C_y \sqrt{t}$, där C_x och C_y är konstanter. Beräkna partikelns 4-hastighet och 4-acceleration utifrån det. Bekräfta att $U^2 = 1$ och $A^\mu U_\mu = 0$.



7. Dynamik

Vi får i det här kapitlet lära oss om hur *rörelsemängd*, *energi* och *kraft*, med hjälp av fyrdimensionell notation, definieras inom den speciella relativitetsteorin och hur man applicerar dessa främst på partikelkollisioner. Dessa storheter är nödvändiga för att kunna formulera relativistisk dynamik.

Vi ställer två krav på de fysikaliska lagar som gäller inom relativistisk dynamik.

1. De måste vara Lorentzinvarianta, d.v.s de måste gälla i oförändrad form i alla inertialsystem.
2. De reduceras till Newtons dynamik då $c \rightarrow \infty$, eller, ekvivalent, alla kroppars hastigheter är mycket mindre än c .

En lag som inte uppfyller det första kravet är Newtons andra lag, $\mathbb{F} = m\mathbf{a}$. Newtons teori är Galileiinvariant, men inte Lorentzinvariant. Istället för att försöka hitta en direkt generalisering av Newtons andra lag, lönar det sig att generalisera en av lagens mest direkta följsatser, nämligen konservering av rörelsemängd. Alla vet att konservering av den totala rörelsemängden i en isolerat system följer från Newtons andra lag. Det som är viktigt här, och kanske mindre känt, är att de två påstående är ekvivalenta och att man skulle kunna bygga Newtonsk mekanik utifrån konservering av rörelsemängden istället för Newtons andra lag.

7.1 Konservering av 4-rörelsemängd

Den fundamentala storheten vi utgår från är den relativistiska 4-rörelsemängden, definierad enligt nedan.

Definition 7.1.1 — 4-rörelsemängd.

$$p^\mu := mU^\mu = m\gamma(1, \mathbf{u}) = (m\gamma, \mathbb{p}) \quad (7.1)$$

Eftersom U^μ är en 4-vektor, om vi postulerar att massan m är en skalär, följer att p^μ också är en 4-vektor. Notera i Ekvation (7.1) den relativistiska 3-rörelsemängden, definierad enligt nedan.

Definition 7.1.2 — relativistisk 3-rörelsemängd.

$$\mathbb{p} := m\gamma\mathbf{u} \quad (7.2)$$

Till skillnad från i klassisk dynamik förekommer här också en γ -faktor i högerledet. Med $\mathbb{p}$ kommer vi alltid att mena det relativistiska uttrycket.

I klassisk dynamik gäller att summan av rörelsemängden för alla partiklar som kommer in i en kollision är lika med summan av rörelsemängden för alla partiklar som kommer ut ur kollisionen. Vi utgår nu från att detta även gäller för 4-rörelsemängden. Betrakta en kollision med k ingående partiklar och n utgående partiklar. Om p_i^μ är 4-rörelsemängden och m_i är massan för ingående partikel i och q_j^μ är 4-rörelsemängden och m'_j är massan för utgående partikel j gäller följande.

7.1.1 — Konservering av 4-rörelsemängd.

$$\sum_{i=1}^k p_i^\mu = \sum_{j=1}^n q_j^\mu \quad (7.3)$$

Om vi låter $c \rightarrow \infty$ säger Ekvation (7.3) att massan och den klassiska rörelsemängden är bevarade, vilket självklart gäller inom klassisk dynamik. Alltså uppfyller Ekvation (7.3) vårt första krav på de lagar som gäller inom relativistisk dynamik. Även det andra kravet uppfylls, eftersom (7.3) har samma uttryck i alla inertialsystem.

Ekvation (7.3) kan delas upp i två olika konserveringslagar. Konservering av komponenten $\mu = 0$ ger

$$\sum_{i=1}^k m_i \gamma_i = \sum_{j=1}^n m'_j \gamma_j, \quad (7.4)$$

vilket i Kapitel 7.3 visar sig vara samma sak som konservering av energi. Konservering av $p^{1,2,3}$ ger

$$\sum_{i=1}^k \mathbb{p}_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{q}_j, \quad (7.5)$$

vilket är konservering av relativistisk 3-rörelsemängd. Notera återigen i Ekvation (7.2) att Lorentzfaktorn är inbakad i den relativistiska 3-rörelsemängden. Ekvation (7.4) och (7.5) uppfyller inte kravet på Lorentzinvarians själva, men gör det tillsammans i Ekvation (7.3). Dock uppfyller de kravet på att reduceras till det klassiska fallet då $c \rightarrow \infty$.

7.2 Den gamla notationen “relativistisk massa”

I äldre litteratur förekommer ofta begreppet *relativistisk massa*. Vi har tidigare kallat vår massa för m , som är oberoende av hastighet, alltså en skalär. Vid användande av relativistisk massa brukar denna hastighetsoberoende massa benämnas som *vilomassa*. Den relativistiska massan definieras då enligt följande.

Definition 7.2.1 — Relativistisk massa.

$$m_{\text{rel}} := m\gamma$$

Den relativistiska massan är alltså vilomassan, det vi idag ser som den riktiga massan, multiplicerat med en gammafaktor. Då $u \rightarrow c$ gäller alltså att $m_{\text{rel}} \rightarrow \infty$. Det är därför det i gammal litteratur brukar stå att partiklar blir tyngre vid höga hastigheter. Men vi kommer nu se att $m\gamma$ har en bättre tolkning.

OBS!

I resten av kompendiet används bara den “riktiga” hastighetsoberoende massan m .

7.3 Energi

Enligt Ekvation (7.4) konserveras summan av $m\gamma$ för de inkommande partiklarna vid en kollision. Vi ställer oss nu frågan, vad är den fysikaliska betydelsen av $m\gamma$ för en partikel egentligen? En Taylorutveckling i u ger

$$m\gamma = m \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right) = m \left(1 + \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^4) \right) = m + T_{\text{Newton}} + \mathcal{O}(u^4). \quad (7.6)$$

Vi har här identifierat den Newtonska rörelseenergin $T_{\text{Newton}} = mu^2/2$ i Taylorutveckling av $m\gamma$, vilken är oberoende av c . Utifrån detta kan vi, precis som Einstein, dra slutsatsen att $m\gamma$ har någon slags koppling till energi. Han identifierade helt enkelt $m\gamma$ som energin E för en partikel med massa m .

Definition 7.3.1 — Energi för partikel.

$$E := m\gamma \quad (7.7)$$

Einstein postulerade alltså 1905 att allt som har en massa också har en inbyggd energi, även när objektet är i vila, $u = 0$ och $\gamma = 1$, vilket medför $E = m$. Om vi återinför enheter c får vi nu den berömda ekvationen $E = mc^2$ som gäller för en massiv partikel i vila.

Vi ser här att Ekvation (7.7) gör att vi kan skriva Ekvation (7.1) som

$$p^\mu = m(\gamma, \gamma \mathbf{u}) = (E, \mathbb{P}). \quad (7.8)$$

Notera att uttrycket $p^\mu = (E, \mathbb{P})$ gäller även för masslösa partiklar som fotonen själv och är därmed mer allmän än $p^\mu = m(\gamma, \gamma \mathbf{u})$. Vi kan säga att i den masslösa gränsen $m \rightarrow 0$ men $\gamma \rightarrow \infty$ så att $m\gamma$ är ändlig.

Utifrån Ekvation (7.8) fås trivialt nedanstående.

7.3.1 — Energi- och rörelsemängdsrelationer.

$$\mathbb{U} = \frac{\mathbb{P}}{E}, \quad \gamma = \frac{E}{m}. \quad (7.9)$$

Ekvation (7.8) gör också att vi istället kan formulera konserveringslagen för $\mu = 0$ i Ekvation (7.4) som

$$\sum_{i=1}^k E_i = \sum_{j=1}^n E'_j. \quad (7.10)$$

Här är E_i energin för ingående partikel i vid kollisionen och E'_i energin för utgående partikel i vid kollisionen.

När en partikel håller hastighet $u = 0$ är $\gamma = 1$. Detta gör att partikelns *viloenergi* är m , eller med c insatt, det välkända uttrycket $E = mc^2$. Energin som tillkommer från att partikeln är i rörelse är alltså partikelns totala energi minus partikelns viloenergi. Den relativistiska rörelseenergin T definieras då enligt följande.

Definition 7.3.2 — Relativistisk rörelseenergi.

$$T := E - m = m(\gamma - 1) \quad (7.11)$$

Analogt med Taylorutvecklingen av $m\gamma$ i Ekvation (7.6) ger en Taylorutveckling av T i Ekvation (7.11)

$$T = m(\gamma - 1) = m \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - 1 \right) = m \left(\frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^4) \right) = T_{\text{Newton}} + \mathcal{O}(u^4).$$

Vi ser här att den relativistiska rörelseenergin T för en partikel med massa m är den klassiska rörelseenergin T_{Newton} plus termer av ordning 4, vilka är försumbara vid låga hastigheter. Den Newtonska rörelseenergin är alltså den första termen i en Taylorutveckling av den relativistiska rörelseenergin.

7.4 Mass-skal-relationen

Från Kapitel 6.5 vet vi att produkten av två 4-vektorer är Lorentzinvariant. Oavsett i vilket inertialsystem man kollar på produkten är resultatet detsamma.

4-rörelsemängden för en partikel i sitt momentana vilosystem är

$$p_{\text{vilo}}^\mu = (m, 0, 0, 0),$$

detta eftersom partikeln har hastighet $u = 0$ i sitt vilosystem. 4-rörelsemängdens Lorentzkvadrat är

$$p_{\text{vilo}}^2 = p_{\text{vilo}}^\mu p_{\text{vilo}\mu} = m^2. \quad (7.12)$$

I ett annat godtyckligt inertialsystem är 4-rörelsemängden

$$p^\mu = (E, \mathbb{P})$$

och dess Lorentzkvadrat är där

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbb{P}^2. \quad (7.13)$$

Högerleden i Ekvation (7.12) och (7.13) måste vara lika med varandra på grund av Lorentzproduktens Lorentzinvarians. Alltså gäller följande samband, känt som *mass-skal-relationen*.

7.4.1 — Mass-skal-relationen.

$$E^2 = \mathbb{P}^2 + m^2 \quad (7.14)$$

7.5 Elastiska kollisioner

Definition 7.5.1 — Elastisk kollision. En kollision är elastisk om massan för varje partikel som kommer in i kollisionen är bevarad efter kollisionen.

OBS! Ett exempel på elastisk kollision är spridning av en elektron mot en proton $ep \rightarrow ep$. Inom partikelfysik är ofta fallet att kollisionen inte är elastisk. Partiklarnas antal, typ och deras massor kan ändras om man kolliderar dem med tillräckligt hög energi.

Som ett enkelt första resultat, kan vi visa att den relativa hastigheten v_{12} mellan två partiklar är bevarad vid en elastisk kollision. Låt två partiklar med 4-rörelsemängd p_1^μ , respektive p_2^μ , och massa m_1 , respektive m_2 , hålla hastigheten v_{12} relativt varandra. Dess Lorentzprodukt $p_1^\mu p_{2\mu}$ är Lorentzinvariant, vilket gör att vi kan kolla på den i ett godtyckligt inertialsystem. I vilosystemet för partikel 1 gäller

$$p_1^\mu = (m_1, 0, 0, 0), \quad p_2^0 = m_2 \gamma(v_{12}) = E_2. \quad (7.15)$$

Utifrån (7.15) får $p_1^\mu p_{2\mu} = m_1 m_2 \gamma(v_{12})$.

Låt nu partiklarna kollidera elastiskt. Enligt Ekvation (7.3), konservering av 4-rörelsemängd, gäller att

$$p_1^\mu + p_2^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu.$$

Båda sidor kvadreras, vilket leder till

$$p_1^\mu p_{1\mu} + 2p_1^\mu p_{2\mu} + p_2^\mu p_{2\mu} = q_1^\mu q_{1\mu} + 2q_1^\mu q_{2\mu} + q_2^\mu q_{2\mu}. \quad (7.16)$$

Då kollisionen är elastisk gäller att $p_1^\mu p_{1\mu} = q_1^\mu q_{1\mu} = m_1^2$ och $p_2^\mu p_{2\mu} = q_2^\mu q_{2\mu} = m_2^2$, samt $q_1^\mu q_{2\mu} = m_1 m_2 \gamma(v'_{12})$, där v'_{12} är den relativa hastigheten efter kollisionen.

Ekvation (7.16) kan då förenklas till

$$m_1 m_2 \gamma(v_{12}) = m_1 m_2 \gamma(v'_{12}) \implies v_{12} = v'_{12}.$$

Alltså är den relativa hastigheten mellan partiklarna, v_{12} , bevarad efter den elastiska kollisionen.



Inom klassisk dynamik gäller att massan alltid är bevarad och att den klassiska rörelseenergin T_{Newton} är bevarad om kollisionen är elastisk. Detta kan vid första anblick verka som en motsägelse mot relativistisk dynamik, där den totala energin alltid är bevarad och massan är bevarad om kollisionen är elastisk. Men inom relativistisk dynamik är det ekvivalent att massan och den relativistiska rörelseenergin T är bevarade, detta syns i Ekvation (7.11).

7.6 Masscentrums inertialsystem

För varje partikelsystem kan man hitta ett inertialsystem där partiklarnas totala 3-rörelsemängd är noll. Vi kallar detta inertialsystem för *masscentrums inertialsystem* och definierar det enligt följande.

Definition 7.6.1 — Masscentrums inertialsystem. Masscentrums inertialsystem, S_{CM} (för “Center of Mass”), definieras för ett system av n partiklar som det inertialsystem som uppfyller

$$\mathbb{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_i = \mathbb{0}, \quad (7.17)$$

där $\mathbb{P}_i = m_i \gamma(u_i) \mathbb{u}_i$ är den relativistiska 3-rörelsemängden för partikel i .

Masscentrums inertialsystem är alltså det inertialsystem där masscentrum är i vila. Detta inertialsystem kallas ibland också för *noll-rörelsemängds-systemet*, eller på engelska *zero momentum frame*, eftersom den totala rörelsemängden är noll.

Den vanligare definitionen av masscentrum är i Newtonsk mekanik

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

där $\bar{\mathbf{r}}$ är ortsvektorn för masscentrum och $\mathbf{r}_i$ är ortsvektorn för partikeln med massa m_i . Inom speciell relativitetsteori är det dock bäst att undvika den definitionen eftersom den leder till onödiga komplikationer. Vi använder istället Definition 7.6.1, då det är mycket enklare för ändamålet. Notera att Ekvation (7.17) bara beskriver hastigheten av det inertialsystem som vi kallar för masscentrums inertialsystem, men inte anger var masscentrum ligger.

När man gör ett experiment är “labbets” inertialsystem, S_{lab} oftast inte samma som S_{CM} , men man kan alltid förflytta sig till S_{CM} genom att göra en “boost” med den hastighet som masscentrum rör sig med relativt det inertialsystem man utgår från. Genom att beteckna den totala 4-rörelsemängden för systemet i S_{lab} ,

$$p_{\text{lab}}^\mu = \sum_{i=1}^n p_i^\mu = (E_{\text{lab}}, \mathbb{P}_{\text{lab}}),$$

kan masscentrums hastighet $\mathbf{u}$, enligt Ekvation (7.9), skrivas

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbb{P}_{\text{lab}}}{E_{\text{lab}}}.$$

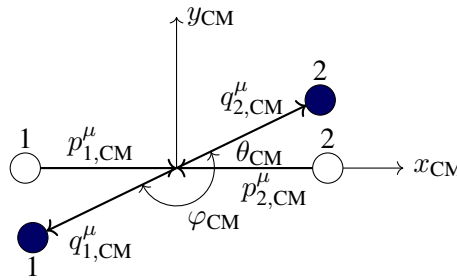
Det enklaste sättet att visa detta är att välja inertialsystem så att $\mathbb{P}_{\text{lab}} = (p_{\text{lab}}, 0, 0)$ samt att S_{lab} och S_{CM} är i standardkonfiguration med varandra. “Boosten” som tar oss från S_{lab} till S_{CM} är då enligt Lorentztransformationen, Ekvation (2.4), på matrisform

$$\begin{bmatrix} \gamma(u) & -\gamma(u)u \\ -\gamma(u)u & \gamma(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\text{lab}} \\ p_{\text{lab}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\text{CM}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

som leder till $u = \frac{p_{\text{lab}}}{E_{\text{lab}}}$ om man betraktar den andra raden.

7.7 Relativistisk “biljard”

Problemet där två partiklar med samma massa kolliderar elastiskt kallas ibland för *relativistisk biljard*. Vi kan se på systemet i “labbets” inertialsystem, S_{lab} . Där skjuter vi en partikel mot en likadan stillastående partikel, till exempel kan det vara två protoner som kolliderar. Det är dock enklare att börja med att se på systemet i masscentrums inertialsystem, S_{CM} , och sedan transformera till labbets inertialsystem. I Figur 7.1 illustreras problemet i masscentrums inertialsystem.



Figur 7.1: Illustration av relativistisk biljard i masscentrums inertialsystem. Partikel 1 och 2 har innan kollisionen 4-rörelsemängderna $p_{1,\text{CM}}^\mu$ respektive $p_{2,\text{CM}}^\mu$ och rör sig längs x_{CM} -axeln. Efter kollisionen har partiklarna 4-rörelsemängderna $q_{1,\text{CM}}^\mu$ respektive $q_{2,\text{CM}}^\mu$ och gör vinklarna φ_{CM} respektive θ_{CM} mot x_{CM} -axeln, där också $\varphi_{\text{CM}} = \pi - \theta_{\text{CM}}$. Partiklarna är innan kollisionen vita och efter kollisionen färgade. För enkelhetens skull, antar vi att partiklarna har samma massa.

Partiklarna är markerade som 1 respektive 2. Deras 4-rörelsemängder är $p_{1,\text{CM}}^\mu$ respektive $p_{2,\text{CM}}^\mu$ innan kollisionen och $q_{1,\text{CM}}^\mu$ respektive $q_{2,\text{CM}}^\mu$ efter kollisionen. Vinklarna som partiklarnas 4-rörelsemängder gör mot x_{CM} -axeln efter kollisionen är markerade som θ_{CM} och φ_{CM} . Det gäller också, eftersom $\mathbb{P}$ är bevarad, att $\varphi_{\text{CM}} = \pi - \theta_{\text{CM}}$.

Precis som i Newtons mekanik, det är omöjligt att beräkna θ_{CM} utan att veta mer detaljer om kollisionen. I verkligheten, måste man använda kvantmekanik, där θ_{CM} betraktas som en stokastisk variabel som uppfyller en viss sannolikhetsdistribution. Vårt mål är inte att beräkna θ_{CM} , men att hitta ett samband mellan θ_{CM} och vinklarna i labbet.

Axlarna i Figur 7.1 har valts så att vi innan kollisionen kan skriva partiklarnas 4-rörelsemängder som

$$p_{1,\text{CM}}^\mu = (E_{\text{CM}}, p_{\text{CM}}, 0, 0) \quad \text{respektive} \quad p_{2,\text{CM}}^\mu = (E_{\text{CM}}, -p_{\text{CM}}, 0, 0),$$

där

$$E_{\text{CM}} = \sqrt{p_{\text{CM}}^2 + m^2}$$

från mass-skal-relationen i Ekvation (7.14) och $m = m_1 = m_2$ betecknar partiklarnas massa.

Med lite trigonometri fås att partiklarnas 4-rörelsemängder efter kollisionen ges av

$$q_{1,\text{CM}}^\mu = (E_{\text{CM}}, p_{\text{CM}} \cos(\varphi_{\text{CM}}), -p_{\text{CM}} \sin(\varphi_{\text{CM}}, 0), \quad (7.18)$$

och

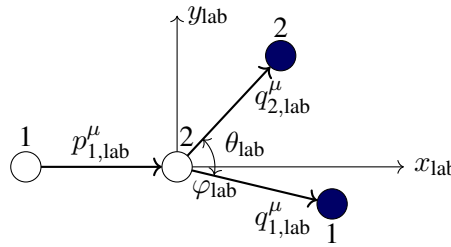
$$q_{2,\text{CM}}^\mu = (E_{\text{CM}}, p_{\text{CM}} \cos(\theta_{\text{CM}}), p_{\text{CM}} \sin(\theta_{\text{CM}}), 0).$$

Detta eftersom de är de enda lösningarna som uppfyller

$$p_{1,\text{CM}}^\mu + p_{2,\text{CM}}^\mu = q_{1,\text{CM}}^\mu + q_{2,\text{CM}}^\mu,$$

det vill säga att 4-rörelsemängden är bevarad. Minustecknet i den tredje komponenten i Ekvation (7.18), $q_{1,\text{CM}}^3 = -p_{\text{CM}} \sin(\varphi_{\text{CM}})$, kommer från att φ_{CM} mäts medurs istället för moturs.

I labbets inertialsystem ser det istället ut som i Figur 7.2 med liknande beteckningar som i Figur 7.1.



Figur 7.2: Relativistisk biljard i labbets inertialsystem. Innan kollisionen är partikel 2 stilla medan partikel 1 rör sig längs x_{lab} -axeln med 4-rörelsemängd $p_{1,\text{lab}}^\mu$ mot partikel 2. Efter kollisionen har partiklarna 4-rörelsemängderna $q_{1,\text{lab}}^\mu$ respektive $q_{2,\text{lab}}^\mu$ och gör vinklarna φ_{lab} respektive θ_{lab} mot x_{lab} -axeln. Även här är partiklarna innan kollisionen vita och efter kollisionen färgade.

Vi vill hitta sambandet mellan θ_{lab} , φ_{lab} och θ_{CM} .

De två systemen, S_{lab} och S_{CM} , är i standardkonfiguration med varandra och S_{CM} rör sig med hastigheten $u = p_{\text{CM}}/E_{\text{CM}}$ relativt S_{lab} . Från Ekvation (7.9) erhålls att Lorentzfaktorn är $\gamma = E_{\text{CM}}/m$. Detta gör att 4-rörelsemängderna i labbets inertialsystem kan uttryckas som den inversa Lorentztransformationen, Ekvation (2.5), av 4-rörelsemängderna i masscentrums inertialsystem. För t - och x -komponenterna av $p_{2,\text{lab}}^\mu$ kan vi därför skriva

$$\begin{bmatrix} \gamma(u) & \gamma(u)u \\ \gamma(u)u & \gamma(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\text{CM}} \\ -p_{\text{CM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(u)(E_{\text{CM}} - up_{\text{CM}}) \\ \gamma(u)(uE_{\text{CM}} - p_{\text{CM}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$$

medan vi för t - och x -komponenterna av $p_{1,\text{lab}}^\mu$ kan skriva

$$\begin{bmatrix} \gamma(u) & \gamma(u)u \\ \gamma(u)u & \gamma(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\text{CM}} \\ p_{\text{CM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(u)(E_{\text{CM}} + up_{\text{CM}}) \\ \gamma(u)(uE_{\text{CM}} + p_{\text{CM}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma(u)E_{\text{CM}} - m \\ 2\gamma(u)p_{\text{CM}} \end{bmatrix}.$$

Vi kan göra på samma sätt för $q_{1,\text{lab}}^\mu$. För x komponenten får vi

$$\gamma(u)(uE_{\text{CM}} + p_{\text{CM}} \cos(\varphi_{\text{CM}})) = \gamma(u)p_{\text{CM}}(1 + \cos(\varphi_{\text{CM}})) = \gamma(u)p_{\text{CM}}(1 - \cos(\theta_{\text{CM}})).$$

Detta inser vi är lika med $p_{1,\text{lab}} \cos(\varphi_{\text{lab}})$, vilket gör att vi får

$$p_{1,\text{lab}} \cos(\varphi_{\text{lab}}) = \gamma(u)p_{\text{CM}}(1 - \cos(\theta_{\text{CM}})). \quad (7.19)$$

För y -komponenten, $q_{1,\text{lab}}^2$, erhålls

$$p_{1,\text{lab}} \sin(\varphi_{\text{lab}}) = p_{\text{CM}} \sin(\varphi_{\text{CM}}) = p_{\text{CM}} \sin(\theta_{\text{CM}}). \quad (7.20)$$

Genom att dividera Ekvation (7.20) med Ekvation (7.19) erhålls uttrycket

$$\tan(\varphi_{\text{lab}}) = \frac{\sin(\theta_{\text{CM}})}{\gamma(u)(1 - \cos(\theta_{\text{CM}}))}. \quad (7.21)$$

Genom att göra på samma sätt för $q_{2,\text{lab}}^\mu$ kan vi för x -komponenten skriva

$$p_{2,\text{lab}} \cos(\theta_{\text{lab}}) = \gamma(u) p_{\text{CM}} (1 + \cos(\theta_{\text{CM}})), \quad (7.22)$$

och för y -komponenten skriva

$$p_{2,\text{lab}} \sin(\theta_{\text{lab}}) = p_{\text{CM}} \sin(\theta_{\text{CM}}). \quad (7.23)$$

När Ekvation (7.23) divideras med Ekvation (7.22) erhålls

$$\tan(\theta_{\text{lab}}) = \frac{\sin(\theta_{\text{CM}})}{\gamma(u)(1 + \cos(\theta_{\text{CM}}))}. \quad (7.24)$$

Om man sedan multiplicerar Ekvation (7.21) med Ekvation (7.24) erhålls

$$\tan(\varphi_{\text{lab}}) \tan(\theta_{\text{lab}}) = \frac{\sin(\theta_{\text{CM}})}{\gamma(u)(1 - \cos(\theta_{\text{CM}}))} \frac{\sin(\theta_{\text{CM}})}{\gamma(u)(1 + \cos(\theta_{\text{CM}}))} = \frac{1}{\gamma(u)^2} < 1. \quad (7.25)$$

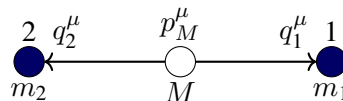
Ekvation (7.21), (7.24) och (7.25) är de förhållanden mellan θ_{lab} , φ_{lab} och θ_{CM} vi sökte.

Observera att Ekvation (7.25) visar en avvikelse från Newtonsk dynamik. I Newtonsk dynamik gäller att $\varphi_{\text{lab}} + \theta_{\text{lab}} = \pi/2$, det vill säga att partiklarna i labbets inertialsystem efter kollision åker iväg i riktningar som är ortogonala mot varandra. Detta ger $\tan(\varphi_{\text{lab}}) \tan(\theta_{\text{lab}}) = 1$, vilket alltså avviker från Ekvation (7.25). Vi kan också se att om $u \rightarrow c$, gäller att $\gamma(u) \rightarrow \infty$, vilket medför att både $\tan(\varphi_{\text{lab}})$ och $\tan(\theta_{\text{lab}}) \rightarrow 0$.

7.8 Partikelsönderfall

Ett annat enkelt problem som kan lösas genom att använda att 4-rörelsemängden är bevarad är partikelsönderfall, det vill säga när instabila partiklar spontant sönderfaller till flera andra partiklar. Här betraktar vi problemet där en partikel med massa M är i vila och sönderfaller till två partiklar, 1 och 2, med massor m_1 respektive m_2 , som i Figur 7.3.

Exempel på när en partikel sönderfaller till två andra partiklar är alfasönderfall och gammasönderfall. Det finns också många exempel inom partikelfysik, till exempel då en kaon sönderfaller till två pioner, $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$.



Figur 7.3: En partikel med massa M är i vila och sönderfaller till två nya partiklar, 1 och 2 (ifyllda), med massor m_1 respektive m_2 . p_M^μ betecknar 4-rörelsemängden för partikeln med massa M innan sönderfall, medan q_1^μ respektive q_2^μ är 4-rörelsemängderna för de nya partiklarna 1 och 2 efter sönderfall.

I Figur 7.3 betecknas 4-rörelsemängden för partikeln med massa M innan sönderfallet med p_M^μ medan 4-rörelsemängderna för partikel 1 och 2 efter sönderfallet betecknas med q_1^μ respektive q_2^μ . Vi väljer att betrakta vilosystemet för partikeln med massa M , där gäller att

$$p_M^\mu = (M, 0, 0, 0). \quad (7.26)$$

Partikel 1 har 3-rörelsemängdsbelopp p efter att den har skapats. Axlarna väljs så att partikel 1 efter sönderfall rör sig i positiv riktning längs x -axeln. Detta gör att partikel 2 rör sig i negativ riktning längs x -axeln med samma 3-rörelsemängdsbelopp som partikel 1, på grund av att 3-rörelsemängden är bevarad. Deras 4-rörelsemängder kan vi skriva som

$$q_1^\mu = (E_1, p, 0, 0) \quad \text{och} \quad q_2^\mu = (E_2, -p, 0, 0). \quad (7.27)$$

Vi har från mass-skal-relationen, Ekvation (7.14), att

$$E_1 = \sqrt{p^2 + m_1^2}, \quad \text{och} \quad E_2 = \sqrt{p^2 + m_2^2}$$

och önskar nu att bestämma p . För att göra det använder vi att 4-rörelsemängden är bevarad, vilket gör att vi kan skriva $p_M^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu$, det vill säga

$$(M, 0, 0, 0) = (E_1, p, 0, 0) + (E_2, -p, 0, 0).$$

De första komponenterna ger oss ekvationen

$$M = E_1 + E_2 = \sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2},$$

från vilken vi kan lösa ut p och få uttrycket

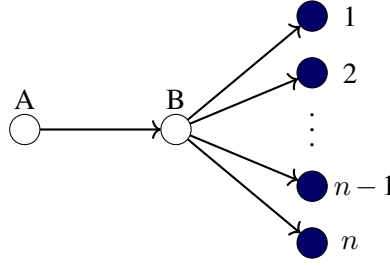
$$p = \frac{\sqrt{M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2m_1^2 - 2M^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2}}{2M}.$$

När vi vet partiklarnas massor vet vi därför också p , E_1 och E_2 och genom Ekvation (7.26) och (7.27) är därmed partiklarnas 4-rörelsemängder bestämda.

Detsamma gäller dock inte om partikeln med massa M skulle sönderfalla till tre eller fler partiklar. I fallet då en partikel sönderfaller till tre partiklar kan vi från rörelsemängdsbevarande konstatera att processen sker i ett plan, men vi kan inte bestämma de nya partiklarnas rörelsemängder enbart utgående från att deras massor är kända. Ett exempel på ett sådant sönderfall är betasönderfall, eller inom partikelfysik när en eta-meson sönderfaller till tre olika pioner, $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-$.

7.9 Tröskelenergi

Om två partiklar kolliderar med tillräcklig energi kan nya partiklar skapas i kollisionen. Man kan tänka att vi i labbets inertialsystem skjuter en partikel A, med massa m_A och 4-rörelsemängd p_A^μ , på en partikel B i vila, med massa m_B 4-rörelsemängd p_B^μ . Då skapas n stycken partiklar, 1, 2, ..., n med massor $m_1, m_2, \dots, m_n$, (där $m_A + m_B < m_1 + m_2 + \dots + m_n$), och 4-rörelsemängder $q_1^\mu, q_2^\mu, \dots, q_n^\mu$. Tröskelenergin är då den minsta energi som partikel A måste ha för att de nya partiklarna ska kunna skapas i kollisionen. Detta är illustrerat i Figur 7.4.



Figur 7.4: Partikel A kolliderar med partikel B, som är i vila i labbets inertialsystem. Kollisionen skapar de nya partiklarna 1, 2, ..., n . För att de nya partiklarna ska kunna skapas i kollisionen måste partikel A ha en energi som är minst lika stor som tröskelenergin.

För att hitta tröskelenergin kan vi börja, som vanligt, med vetskapen att 4-rörelsemängden är bevarad, så vi skriver

$$p_A^\mu + p_B^\mu = \sum_{i=1}^n q_i^\mu.$$

Vi kan nu skriva Lorentzprodukten

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_A^\mu + p_B^\mu)(p_{A\mu} + p_{B\mu}),$$

vilken i masscentrums inertialsystem är lika med den totala energin i kvadrat eftersom det, enligt Definition 7.6.1, i masscentrums inertialsystem gäller att

$$p_A^\mu + p_B^\mu = (E_A + E_B, \mathbb{P} - \mathbb{P}) = (E_A + E_B, \mathbb{0}),$$

vilket medför att

$$s = (E_A + E_B)^2 = E_{\text{tot,CM}}^2. \quad (7.28)$$

Eftersom 4-rörelsemängden är bevarad kan vi för de utgående partiklarna också skriva

$$s = \left(\sum_{i=1}^n q_i^\mu \right)^2 = \sum_{i=1}^n (q_i^\mu)^2 + \sum_{i<j} 2q_i^\mu q_{j\mu} = \sum_{i=1}^n m_i^2 + \sum_{i<j} 2m_i m_j \gamma(u_{ij}),$$

där u_{ij} är den relativa hastigheten mellan partikel i och j . Vi inser att det minsta värdet erhålls när $\gamma(u_{ij}) = 1$ för alla i, j , vilket innebär att alla partiklar är i vila relativt varandra. Vi får att

$$s \geq \sum_{i=1}^n m_i^2 + \sum_{i<j} 2m_i m_j = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2. \quad (7.29)$$

Sätts Ekvation (7.29) in i Ekvation (7.28) erhålls att

$$E_{\text{tot,CM}} \geq \sum_{i=1}^n m_i.$$

Detta gäller i masscentrums inertialsystem, men i alla andra inertialsystem krävs mer energi eftersom att vi där "flyttar" på masscentrums inertialsystem.

Eftersom Lorentzprodukten, s , är Lorentzinvariant kan vi också uttrycka den i labbets inertialsystem, där partikel A kolliderar med partikel B i vila och skapar partiklarna i . Vi kan uttrycka 4-rörelsemängderna för partikel A och B som

$$p_A^\mu = (E_{\text{lab}}, p_{\text{lab}}, 0, 0) \quad \text{respektive} \quad p_B^\mu = (m_B, 0, 0, 0).$$

Mass-skalarrelationen i Ekvation (7.14) ger att $E_{\text{lab}}^2 = p_{\text{lab}}^2 + m_A^2$, vi kan därmed skriva Lorentzprodukten, s , som

$$\begin{aligned}
 s &= (p_A + p_B)^2 \\
 &= (E_{\text{lab}} + m_B, p_{\text{lab}}, 0, 0)^2 \\
 &= (E_{\text{lab}} + m_B)^2 - p_{\text{lab}}^2 \\
 &= E_{\text{lab}}^2 + 2E_{\text{lab}}m_B + m_B^2 - p_{\text{lab}}^2 \\
 &= p_{\text{lab}}^2 + m_A^2 + 2E_{\text{lab}}m_B + m_B^2 - p_{\text{lab}}^2 \\
 &= m_A^2 + 2E_{\text{lab}}m_B + m_B^2.
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

Genom att nu sätta in Ekvation (7.30) i Ekvation (7.29) erhålls att tröskelenergin erhålls av följande samband.

7.9.1 — Tröskelenergin.

$$E_{\text{lab}} \geq E_{\text{tröskel}} = \frac{(\sum_{i=1}^n m_i)^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B} \tag{7.31}$$

Likhet ger den minsta energi som partikel A måste ha när den kolliderar med partikel B för att kunna skapa partiklarna i i vila relativt varandra, alltså tröskelenergin. Ofta används också den kinetiska tröskelenergin, som enligt Ekvation (7.11) blir $T_{\text{tröskel}} = E_{\text{tröskel}} - m_A$.

■ **Exempel 7.1** — $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$. Ett exempel på en process där två partiklar kolliderar och ytterligare partiklar skapas är när två protoner, p , kolliderar och det förutom de två protonerna också skapas en pion, π^0 . Vi betecknar respektive protoners massa med M , pionens massa med m och kan med Ekvation (7.31) skriva

$$E \geq \frac{(M + M + m)^2 - M^2 - m^2}{2M} = M + 2m + \frac{m^2}{2M}$$

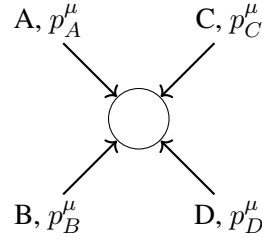
för den energi som den ena protonen måste ha i labbets inertialsystem, där den andra protonen är i vila, för att processen ska kunna ske. För protonens kinetiska energi kan vi enligt Ekvation (7.11) skriva

$$T = E - M \geq 2m + \frac{m^2}{2M}.$$

■

7.10 Mandelstamvariabler

Mandelstamvariablerna, döpta efter *Stanley Mandelstam* (1928-2016), är variabler som används vid allmänna spridningsprocesser där två partiklar, A och B, kommer in och två partiklar, C och D, kommer ut. Vi betecknar alla partiklar som ingående, illustrerat i Figur 7.5. (I en fysikalisk process som A B till C D ska man då byta tecken på p_C^μ och p_D^μ .)



Figur 7.5: En allmän spridningsprocess mellan två partiklar. Här betecknas alla partiklar som ingående och deras 4-rörelsemängder är betecknade med $p_A^\mu, p_B^\mu, p_C^\mu$ respektive p_D^μ .

Vi betecknar partiklarnas 4-rörelsemängder med $p_A^\mu, p_B^\mu, p_C^\mu$ respektive p_D^μ och kan allmänt skriva dem som

$$p_A^\mu = (E_A, \mathbb{p}_A), \quad p_B^\mu = (E_B, \mathbb{p}_B), \quad p_C^\mu = (E_C, \mathbb{p}_C) \quad \text{respektive} \quad p_D^\mu = (E_D, \mathbb{p}_D).$$

Vi vet också angående 4-rörelsemängdernas Lorentzkvadrater att

$$p_A^2 = m_A^2, \quad p_B^2 = m_B^2, \quad p_C^2 = m_C^2 \quad \text{och} \quad p_D^2 = m_D^2,$$

där m_A, m_B, m_C och m_D betecknar partiklarnas respektive massor. Dessutom har vi från bevarande av 4-rörelsemängden, med alla partiklar ingående som i Figur 7.5, att

$$p_A^\mu + p_B^\mu + p_C^\mu + p_D^\mu = 0.$$

Detta gör att vi exempelvis kan uttrycka p_D i de andra 4-rörelsemängderna som $p_D^\mu = -p_A^\mu - p_B^\mu - p_C^\mu$.

Frågan är nu vilka icke konstanta skalärer som kan bildas utgående från dessa 4-rörelsemängder. Man kan bygga följande tre variabler.

Definition 7.10.1 — Mandelstamvariablerna.

$$s := (p_A + p_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2p_A^\mu p_{B\mu}$$

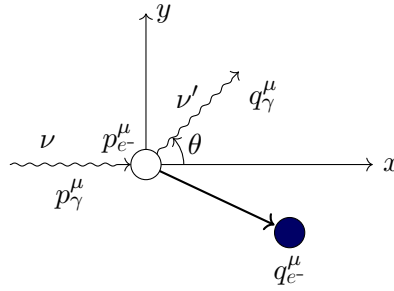
$$t := (p_A + p_C)^2 = m_A^2 + m_C^2 + 2p_A^\mu p_{C\mu}$$

$$u := (p_A + p_D)^2 = m_A^2 + m_D^2 + 2p_A^\mu p_{D\mu}$$

Det kan visas, vilket ska göras i Övningsuppgift 7.18, att $s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$. D.v.s. bara två av dessa variabler är oberoende och kan användas för att ge en fullständig beskrivning av relativistiska $2 \rightarrow 2$ processer.

7.11 Comptoneffekten

En bekräftelse av Einsteins idé om att fotoner beter sig som biljardbollar med energi $h\nu$ och 3-rörelsemängd $h\nu$ gavs 1922 av ett känt experiment av *Arthur Compton*. Fenomenet kallas för *Comptoneffekten*. Experimentet är enkelt och går ut på att man låter en foton kollidera med en elektron i vila, $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$. Fotonen kommer då att förlora energi och studsas iväg åt ett annat håll.



Figur 7.6: En visualisering av hur partiklarna rör sig i Comptons experiment, ν och p_γ^μ är fotonens frekvens respektive 4-rörelsemängd innan kollisionen. ν' och q_γ^μ är fotonens frekvens respektive 4-rörelsemängd efter kollisionen. p_{e-}^μ är elektronens 4-rörelsemängd före kollisionen och q_{e-}^μ är elektronens 4-rörelsemängd efter kollisionen.

Tänk dig en situation som i Figur 7.6 där en foton rör sig med en frekvens ν mot en elektron som är i vila. Innan kollisionen har fotonen 4-rörelsemängd (kom ihåg $c = 1$ överallt).

$$p_\gamma^\mu = h\nu (1, 1, 0, 0)$$

och elektronen 4-rörelsemängd

$$p_{e-}^\mu = (m_{e-}, 0, 0, 0),$$

där h är plancks konstant och m_{e-} är elektronens massa. När kollisionen har skett åker fotonen iväg med en vinkel θ mot sin tidigare hastighetsriktning med en ny frekvens ν' . Elektronen har efter kollisionen 4-rörelsemängd q_{e-}^μ , som vi inte behöver explicit i detta experiment. Rörelsemängden för fotonen efter kollisionen är

$$q_\gamma^\mu = h\nu' (1, \cos(\theta), \sin(\theta), 0),$$

vilket ger att Lorentzkvadraterna för fotonens 4-rörelsemängd före respektive efter kollisionen är

$$p_\gamma^2 = q_\gamma^2 = 0. \quad (7.32)$$

OBS! Lorentzkvadraten av en fotons 4-rörelsemängd är alltid lika med 0.

Genom att kolla på elektronen i sitt vilosystem före respektive efter kollisionen erhålls att

$$p_{e-}^2 = q_{e-}^2 = m_{e-}^2. \quad (7.33)$$

Rörelsemängdens bevarande ger oss följande.

$$\begin{aligned} p_\gamma^\mu + p_{e-}^\mu &= q_\gamma^\mu + q_{e-}^\mu \\ \implies p_\gamma^\mu + p_{e-}^\mu - q_\gamma^\mu &= q_{e-}^\mu \end{aligned} \quad (7.34)$$

Vi kvadrerar nu både sidor och sätter in Ekvation (7.32) och (7.33) i Ekvation (7.34) enligt

$$\begin{aligned} p_\gamma^2 + p_{e-}^2 + q_\gamma^2 + 2p_\gamma^\mu p_{e-\mu} - 2p_{e-}^\mu q_{\gamma\mu} - 2p_\gamma^\mu q_{\gamma\mu} &= q_{e-}^2 \\ \implies 0 + \cancel{m_{e-}^2} + 0 + 2h\nu m_{e-} - 2h\nu' m_{e-} - 2h^2\nu\nu' (1 - \cos(\theta)) &= \cancel{m_{e-}^2} \\ \implies m_{e-} (\nu - \nu') &= h\nu\nu' (1 - \cos(\theta)) = 2h\nu\nu' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

eller med våglängderna $\lambda = 1/\nu$ och $\lambda' = 1/\nu'$

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_{e-}} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

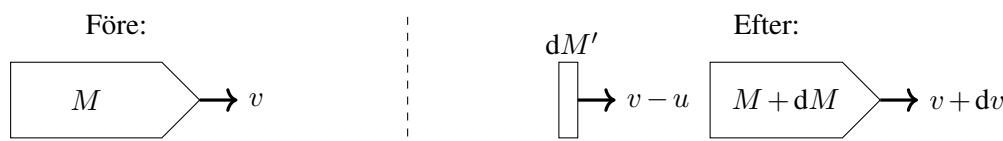
vilket är ett resultat som stämmer väl överens med experiment.

7.12 Den relativistiska raketekvationen

Nedan följer en välkänd klassisk beräkning och dess relativistiska generalisering. Vi ställer oss frågan om hur mycket bränsle en raket ska ta med sig för att kunna accelerera från hastigheten $v_{\text{före}}$ till v_{efter} . Vi försummar bränsle som krävs för att lämna planetens gravitationsfältet, d.v.s. betraktar situationen där raketerna redan befinner sig i rymden.

7.12.1 Det klassiska fallet

I klassisk dynamik kan den maximala hastigheten i vakuum som en raket kan komma upp i bestämmas med hjälp av *Tsiolkovskys raketekvation*, som härleds på följande vis.



Figur 7.7: En schematisk bild av raketerna och dess bränsle vid olika tidpunkter, till vänster har vi en raket med massan M och hastigheten v . Till höger har vi samma raket en infinitesimal tid dt senare, med hastighet $v + dv$ och massan $M + dM$ samt en bit raketbränsle med massan dM' och hastigheten $v - u$.

Tänk dig en raket som rör sig i en dimension och som släpper ut sitt bränsle med hastigheten u relativt raketerna. Vid en viss tid har raketerna hastigheten v relativt sitt initiala vilosystem och massan M . En infinitesimal tid dt senare har raketerna hastighet $v + dv$ och massan $M + dM$, observera att $dM < 0$. Det bränsle som är förbrukat har då hastigheten $-u$ relativt raketerna och massan $dM' = -dM$ ¹. Det erhålls då ur klassisk kinematik att bränslet håller hastigheten $v - u$ relativt raketerna initiala vilosystem. Klassiskt rörelsemängdsbevarande ger då att

$$\begin{aligned} M\vec{v} &= (M + dM)(v + dv) + dM'(v - u) = M\vec{v} + v dM + M dv + dv dM - v dM + u dM \\ &\Rightarrow M dv + dv dM + u dM = 0. \end{aligned}$$

Termen $dv dM$ stryks, då är det av andra ordning i variation, vilket leder till att

$$dv = -u \frac{dM}{M}.$$

Integrering från en godtycklig startpunkt till en godtycklig slutpunkt ger

$$v_{\text{efter}} - v_{\text{före}} = u \ln \left(\frac{M_{\text{före}}}{M_{\text{efter}}} \right). \quad (7.35)$$

7.12.2 Det relativistiska fallet

Den relativistiska generaliseringen av Ekvation (7.35), som kan vara intressant om hastigheterna är tillräckligt stora, kan vi komma fram till genom att resonera på liknande sätt. Vi använder att den relativistiska 4-rörelsemängden är bevarad, vilket kan delas upp i att den relativistiska 3-rörelsemängden och energin är bevarad enligt Ekvation (7.5) och (7.10)

3-rörelsemängden för raketerna relativt dess initiala vilosystem är först $Mv\gamma(v)$. Efter att bränsle med massa dM' släpps ut har raketerna 3-rörelsemängd $(M + dM)(v + dv)\gamma(v + dv)$. Det utsläppta bränslet håller hastigheten $-u$ relativt raketerna. Bränslets hastighet relativt raketerna initiala vilosystem är då $\frac{v-u}{1-uv}$ enligt Ekvation (4.2), vilket givetvis skiljer sig från klassisk kinematik. Den

¹Denna likhet kommer inte att gälla i den relativistiska härledningen.

relativistiska 3-rörelsemängdens bevarande ger då att

$$Mv\gamma(v) = (M + dM)(v + dv)\gamma(v + dv) + dM' \frac{v - u}{1 - uv} \gamma\left(\frac{v - u}{1 - uv}\right). \quad (7.36)$$

Notera att $dM \neq -dM'$ i allmänhet här.

Vi använder energibevarande, som vi inte kunde använda i den klassiska härledningen då explosionerna ökade den Newtonska energin i systemet. Relativistisk energibevarande ger att

$$M\gamma(v) = (M + dM)\gamma(v + dv) + dM'\gamma\left(\frac{v - u}{1 - uv}\right). \quad (7.37)$$

Lorentzfaktorerna i Ekvation (7.36) och (7.37) kan förenklas enligt

$$\gamma(v + dv) = \gamma(v) + \frac{d\gamma(v)}{dv} dv = \gamma(v) + v\gamma^3(v) dv$$

och

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{v - u}{1 - uv}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v - u}{1 - uv}\right)^2}} = \frac{1 - uv}{\sqrt{1 - 2uv + u^2v^2 - v^2 - u^2 + 2uv}} \\ &= \frac{1 - uv}{\sqrt{1 + u^2v^2 - v^2 - u^2}} = \frac{1 - uv}{\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2}} = (1 - uv)\gamma(u)\gamma(v). \end{aligned}$$

Vi stryker nu alla termer i Ekvation (7.36) och (7.37) där infinitesimaler multipliceras med varandra. Då förenklas Ekvation (7.36) till

$$\begin{aligned} \cancel{Mv\gamma(v)} &= \cancel{Mv\gamma(v)} + v\gamma(v)dM + M\gamma(v)dv + Mv^2\gamma^3(v)dv \\ &\quad + (v - u)\gamma(v)\gamma(u)dM' \\ \implies v dM + M\gamma^2(v)dv + (v - u)\gamma(u)dM' &= 0 \end{aligned} \quad (7.38)$$

och Ekvation (7.37) till

$$\begin{aligned} \cancel{M\gamma(v)} &= \cancel{M\gamma(v)} + \gamma(v)dM + Mv\gamma^3(v)dv + (1 - uv)\gamma(v)\gamma(u)dM' \\ \implies dM + Mv\gamma^2(v)dv + (1 - uv)\gamma(u)dM' &= 0, \end{aligned} \quad (7.39)$$

där $\gamma(v)$ stryks i varje term i både Ekvation (7.38) och (7.39). Om vi sedan multiplicerar Ekvation (7.38) med $(1 - uv)$ och Ekvation (7.39) med $(u - v)$ för att sedan addera ekvationerna med varandra erhålls

$$\begin{aligned} (1 - uv)\left(v dM + M\gamma^2(v)dv + (v - u)\gamma(u)dM'\right) &+ \\ + (u - v)\left(dM + Mv\gamma^2(v)dv + (1 - uv)\gamma(u)dM'\right) &= 0 \\ \implies \frac{u}{\gamma^2(v)}dM + Mdv = 0 \implies \gamma^2(v)dv = -u\frac{dM}{M}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Integrering av vänsterledet i Ekvation (7.40) ger att

$$\int_{v_{\text{före}}}^{v_{\text{efter}}} \frac{dv}{1 - v^2} = \frac{1}{2} \int_{v_{\text{före}}}^{v_{\text{efter}}} dv \left(\frac{1}{1 + v} + \frac{1}{1 - v} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v_{\text{efter}}}{1 - v_{\text{efter}}} \cdot \frac{1 - v_{\text{före}}}{1 + v_{\text{före}}} \right) \quad (7.41)$$

och integrering av högerledet i Ekvation (7.40) ger att

$$-u \int_{M_{\text{före}}}^{M_{\text{efter}}} \frac{dM}{M} = u \ln \frac{M_{\text{före}}}{M_{\text{efter}}}. \quad (7.42)$$

Likhet mellan Ekvation (7.41) och (7.42) ger att

$$\frac{M_{\text{före}}}{M_{\text{efter}}} = \left(\frac{1 + v_{\text{efter}}}{1 - v_{\text{efter}}} \cdot \frac{1 - v_{\text{före}}}{1 + v_{\text{före}}} \right)^{1/(2u)}.$$

7.13 4-kraften

Hittills har vi klarat oss bra utan att använda kraftbegreppet, faktum är att krafter inte är lika viktiga, varken här eller inom kvantmekanik, som i klassisk fysik. Det finns dock fortfarande områden där kraftbegreppet kan vara bra att ha, ett exempel på ett sådant område är elektromagnetism, där Lorentzkraften är viktig. Med detta sagt definieras *4-kraften* enligt följande.

Definition 7.13.1 — 4-kraft.

$$F^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu$$

Detta är en lämplig definition eftersom den är Lorentz kovariant och dess rumskomponenter reduceras till $\mathbb{F} = m\mathbf{a}$ då $c \rightarrow \infty$. Vi kan skriva

$$F^\mu = \frac{d}{d\tau} p^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} (E, \mathbb{P}) = \gamma \left(\frac{dE}{dt}, \frac{d\mathbb{P}}{dt} \right) \quad (7.43)$$

och definiera den relativistiska *3-kraften* enligt följande.

Definition 7.13.2 — 3-kraft.

$$\mathbb{F}_{\text{rel}} := \frac{d\mathbb{P}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\gamma \mathbf{u})$$

Vi vill fokusera på *massbevarande* krafter, det vill säga de krafter som uppfyller $\frac{dm}{d\tau} = 0$. Då gäller att

$$F^\mu = \frac{d}{d\tau} p^\mu = m A^\mu + \cancel{\frac{dm}{d\tau} U^\mu} = m A^\mu. \quad (7.44)$$

Ekvation (6.19) ger att

$$F^\mu U_\mu = m A^\mu U_\mu = 0$$

för en massbevarande kraft. Det gäller allmänt att

$$F^\mu U_\mu = \gamma \left(\frac{dE}{dt}, \frac{d\mathbb{P}}{dt} \right) \cdot \gamma (1, \mathbf{u}) = \gamma \left(\frac{dE}{dt}, \mathbb{F}_{\text{rel}} \right) \cdot \gamma (1, \mathbf{u}) = \gamma^2 \left(\frac{dE}{dt} - \mathbb{F}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{u} \right),$$

därför gäller för en massbevarande kraft att

$$\frac{dE}{dt} = \mathbb{F}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{u}. \quad (7.45)$$

Insättning av Ekvation (7.45) i Ekvation (7.43) ger att

$$F^\mu = \gamma (\mathbb{F}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{u}, \mathbb{F}_{\text{rel}}). \quad (7.46)$$

(7.46) visar att den komponenten $\mu = 0$ är beroende av de andra, och innehåller därför ingen ny information, för en massbevarande kraft.

7.14 Övningsuppgifter

7.1 Protoner som används i medicinskt syfte har hastigheten $0.6c$. Hur mycket energi, i *Joule*, måste användas för att accelerera 10^9 sådana protoner från vila? En protons massa är 938 MeV .

7.2 Hur snabbt måste en proton röra sig för att dess kinetiska energi ska motsvara tio gånger dess viloenenergi?

7.3 Neutriner med energi $E \approx 20$ MeV från supernovan SN1987A, som ligger 168000 ly (ljusår) från jorden, detekterades två timmar efter att stjärnans ljus nådde Jorden.² Beräkna en övre gräns för en neutrinos massa.

7.4 En fri partikel utan spinn, med rörelsemängd $\mathbb{p}$ beskrivs i kvantmekanik med hjälp av en vågfunktion $\psi(\mathbf{x}, t) = \exp(i(\mathbb{p} \cdot \mathbf{x} - Et)/\hbar)$.

(a) Visa att den ickerelativistiska fria Schrödingerekvationen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

är uppfylld om $E = \mathbb{p}^2/(2m)$.

(b) Med samma ψ , visa att det relativistiska sambandet $E^2 = \mathbb{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ istället uppfyller Klein-Gordon-ekvationen

$$-\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi + m^2 c^4 \psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi.$$

(c) Visa att man i enheter $c = \hbar = 1$ kan skriva Klein-Gordon-ekvationen som

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0.$$

7.5 Betrakta en elastisk kollision mellan en "kula" med massa M och ett stationärt "mål" med massa m . Bevisa att kulans energi efter kollisionen inte kan överstiga ett visst värde och hitta det värdet.

7.6 Betrakta en elastisk kollision av en pion med total energi 100 GeV och en proton i vila.

(a) Vad är γ -faktorn för pionen före kollisionen?

(b) Vad är den maximala γ -faktorn pionen kan ha efter kollisionen?

Protonens massa: $M = 0.938$ GeV, pionens massa: $m = 0.140$ GeV.

7.7 Två fotoner med samma frekvens ν färdas i ett inertialsystem S, den ena längs den positiva x -axeln och den andra längs den positiva y -axeln. Bestäm hastigheten för masscentrum.

7.8 Den subatomära partikeln Λ , med massa 1116.0 MeV, sönderfaller i vila till en proton, med massa 938.0 MeV, och en pion, med massa 140.0 MeV.

(a) Bestäm energierna för den utgående protonen och pionen.

(b) Bestäm även hastigheterna (i enheter av c) för den utgående protonen och pionen.

7.9 En laddad pion π^+ , med massa 140 MeV, sönderfaller till en myon μ^+ , med massa 105 MeV, och en neutrino ν med försumbar massa. Processen är: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. Bestäm energierna för myonen och neutronen i pionens vilosystem.

7.10 Beräkna den maximala kinetiska energin en elektron kan ha när den skapas från att en kaon sönderfaller i vila: $K^- \rightarrow e^- + \pi^0 + \bar{\nu}$. Jämför svaret med motsvarande process för en myon $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$. Betrakta neutrino ν och antineutrino $\bar{\nu}$ som masslösa.

$m_{e^-} = 0.511$ MeV, $m_{K^-} = 498$ MeV, $m_{\mu^-} = 105$ MeV, $m_{\pi^0} = 135$ MeV.

7.11 Betrakta reaktionen $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0$, där en pion π^- träffar en proton p i vila och producerar en kaon K^0 och en Σ^0 baryon. Vad är den minsta totala och kinetiska energin som pionen måste ha i protonens vilosystem för att denna reaktion ska vara möjlig?

Massorna är i enheter av MeV, $m_{\pi^-} = 140$, $m_p = 938$, $m_{K^0} = 498$, $m_{\Sigma^0} = 1193$.

7.12 En Higgsboson sönderfaller i vila till två fotoner. En av fotonerna har relativistisk 3-rörelsemängd $\mathbb{p} = (31.25, 54.13, 0)$ GeV.

(a) Vad är den fotonens 4-rörelsemängd?

(b) Vad är 4-rörelsemängden för den andra fotonen?

²Tidsskillnad på ett par timmar kan förklaras med astrofysikaliska processer inom supernovor och kan bara tas som en övre gräns till skillnaden i neutriners och ljusets färdtid.

(c) Beräkna massan för Higgsbosonen i enheter av GeV med hjälp av dessa data.

7.13 Beräkna tröskelenergin som krävs för att skapa en antiproton $\bar{p}$ genom att stråla protoner på väteatomer i vila. Processen är $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$.

Jämför svaret med tröskelenergin som krävs om man använder positroner e^+ istället. Processen är då $e^+ + e^- \rightarrow p + \bar{p}$.

$$m_p = m_{\bar{p}} = 938 \text{ MeV}, m_{e^+} = m_{e^-} = 0.511 \text{ MeV}.$$

7.14 Vårt Universum är fyllt med fotoner från kosmiska strålning (CMBR) med energi $E_{\text{CMBR}} \approx k_B T$, där $T = 2.72 \text{ K}$. Vad är den högsta energi en foton som färdas genom kosmos kan ha, utan att skapa ett elektron-positron-par vid kollision med en CMBR-foton? Processen är $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$.

$$m_{e^+} = m_{e^-} = 0.511 \text{ MeV}.$$

7.15 En pion, med massa $m_\pi = 140 \text{ MeV}$, som träffar en proton i vila, med massa $m_p = 938 \text{ MeV}$, kan ge upphov till en kaon, med massa $m_K = 498 \text{ MeV}$, och en Lambda-partikel, med massa $m_\Lambda = 1116 \text{ MeV}$. Processen är $\pi + p \rightarrow K + \Lambda$. Vad är den minsta kinetisk energi som pionen måste ha för att processen ska kunna ske? Den kinetiska energin är $T_\pi = E_\pi - m_\pi$, där E_π är pionens totala energi.

7.16 En positron e^+ med kinetisk energi T förintas i en kollision med en elektron e^- i vila. Ur kollisionen skapas två fotoner $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$. Fotonerna har samma energi och samma vinkel fast spegelvänt relativt den ursprungliga positronens riktning. Bestäm fotonernas energi och vinkel.

$$m_{e^+} = m_{e^-} = 0.511 \text{ MeV}.$$

7.17 Vad är den minsta energi (tröskelenergi) som en foton γ måste ha, så att när den kolliderar med en proton p i vila ger upphov till ett slutligt tillstånd bestående av en proton och en neutral pion π^0 : $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$? Detta kallas Primakoff-effekten.

(a) Uttryck fotonenergin i MeV. Protonens massa är 938 MeV och pionens massa är 135 MeV .

(b) För en fotonenergi strax över tröskeln, hur rör sig den slutliga protonen och pionen i förhållande till varandra?

7.18 I spridningsprocessen $A + B \rightarrow C + D$ med 4-rörelsemängd $p_A^\mu, p_B^\mu, p_C^\mu$ och p_D^μ definierar man tre Lorentzinvarianter kallade Mandelstamvariabler:

$$s = (p_A + p_B)^2, \quad t = (p_A + p_C)^2, \quad u = (p_A + p_D)^2.$$

Visa att $s > 0$ och att $s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$. Visa också att $m_A = m_B = m_C = m_D$ medför att $t, u \leq 0$.

7.19 Ett rymdskepp drivs genom att sända ut fotoner i motsatt riktning mot dess rörelse. Det börjar i vila och slutar med en hastighet $v = 1.2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Bestäm förhållandet mellan den ursprungliga och slutliga massan.

7.20 Vi vill designa en laserdriven raket som efter att ha accelererat från vila till maxhastighet behåller minst hälften av sin ursprungliga massa. Vad är den maximala hastigheten raketerna kan nå?

7.21 Låt $\omega = 2\pi\nu$ vara vinkelfrekvensen, $k = 2\pi/\lambda$ vara vågtalet av de Broglie-vågen och $l = h/(mc)$ vara Comptonvåglängden associerad med en partikel med massa m som rör sig med hastighet u . (Vi återinför c för tillfället.)

(a) Visa följande identitet

$$\omega^2 - c^2 k^2 = (2\pi mc^2/h)^2 = (2\pi c/l)^2.$$

(b) Visa sedan att grupphastigheten är

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = u.$$

7.22 En kosmisk proton, med $E_p \approx 10^{11} \text{ GeV}$ kolliderar med en foton från den kosmiska bakgrundsstrålningen med energi $E_\gamma \approx 10^{-3} \text{ eV}$. Visa att kollisionen skapar en foton med energi $E_{\gamma'} \approx 10^{19} \text{ eV}$. (Detta kallas för *invers Comptoneffekt*. För enkelhetens skull tänker vi oss en endimensionell rörelse.)



8. Elektromagnetism

Den speciella relativitetsteorin spelar en viktig roll inom den moderna beskrivningen av klassisk elektromagnetism och motiverar bland annat en kompakt formulering av elektromagnetismens lagar, nämligen *manifest Lorentzinvariant tensorform*, ibland även kallat *kovariant formalism*. Kapitlet inleds med en beskrivning av skalär-, vektor- och tensorfält följt av en genomgång om hur de klassiska elektromagnetiska lagarna Lorentzkraften, kontinuitetsekvationen, Maxwells ekvationer och *gaugepotentialen* kan skrivas i manifest Lorentzinvariant tensorform. Formalismen gör det enkelt att bevisa att den klassiska elektromagnetismens lagar har samma form i alla inertialsystem och ger också ett sätt att översätta fälten och krafterna från ett inertialsystem till ett annat.

Därefter kommer en överskådlig genomgång av hur man kan hantera strålning från en rörlig laddning (*Lienard Wiechert potential*), *minsta verkans princip*, *stressenergitensorn* och *effektförlusten för en laddad accelererande partikel*.

8.1 Skalär-, vektor- och tensorfält

I kurser inom matematisk analys i flera variabler får man lära sig om *skalärfält* och *vektorfält*. Ett skalärfält är en funktion $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$, det vill säga en funktion som tar n stycken tal som invärden och ger en skalär som utvärde. Inom Newtonsk mekanik förekommer $n = 3$ med invärdena x , y och z vid beskrivning av rummet. Ett exempel på detta är en funktion som beskriver temperaturen i ett rum som då har x , y och z som invärde och en temperatur som utvärde. På samma sätt som för en vanlig skalär vill vi att ett skalärfält inte ska bero på vilket koordinatsystem man uttrycker det i. Skalärfältets funktionsbeskrivning måste se olika ut i olika koordinatsystem, så att de båda funktionsbeskrivningarna ger samma värde till samma punkt (som är representerad med olika uppsättningar koordinater i de olika koordinatsystemen). Med andra ord gäller att

$$T'(\mathbb{x}') = T(\mathbb{x})$$

där T och T' är funktionsbeskrivningen av skalärfältet i två olika koordinatsystem. Ett intressant fall är när $\mathbb{x}$ och $\mathbb{x}'$ är relaterade med en rotation enligt $\mathbb{x}' = L\mathbb{x}$, d.v.s. $x'^i = L_j^i x^j$ där L_j^i är samma

rotationsmatris vi såg i Kap. 6. Då kan relationen mellan T' och T skrivas

$$T'(L\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) \quad \text{eller} \quad T'(\mathbf{x}) = T(L^{-1}\mathbf{x}).$$

Ett vektorfält är en generalisering av skalärfältet i och med att det har en vektor som utvärde. Ett exempel på detta är en funktion som beskriver hastigheten hos vattnet i en vattentank, där utvärdena till exempel kan beskriva vattnets hastighet i x -, y - respektive z -led. Även här vill vi att vektorfältet inte ska bero på vilket koordinatsystem man uttrycker det i, men här måste både koordinaterna och funktionsbeskrivningen av vektorfältet transformeras. Om transformationen är en rotation blir detta krav då att

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}') = L\mathbf{v}(\mathbf{x})$$

vilket kan skrivas om till

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}) = L\mathbf{v}(L^{-1}\mathbf{x}).$$

Ett tensorfält är en generalisering av skalär- och vektorfältet. Ett tensorfält tar n stycken tal som invärde och ger en tensor som utvärde. I speciell relativitetsteori är det, som vi har sett tidigare, vanligt att jobba med 4-vektorer, det vill säga $n = 4$. Den intressanta transformationen är då Lorentztransformationen istället bara för rotationen. Vi har alltså x^μ istället för x^i och Λ_ν^μ istället för L_j^i . Har vi då till exempel ett kovariant tensorfält av rank två, och transformationen mellan två koordinatsystem är en Lorentztransformation måste tensorfältet uppfylla ekvationen

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu F^{\rho\sigma}(x).$$

Notera att argumentet x (eller x') av fältet beskriver alla 4 komponenter x^0, x^1, x^2, x^3 .

8.2 Lorentzkraften

För att undersöka om de tidigare kända elektromagnetiska lagarna är konsistenta med speciell relativitetsteori behöver vi göra antaganden om egenskaper hos elektrisk laddning. Nämligen att elektrisk laddning är invariant, det vill säga att laddningen hos en partikel är samma för alla observatörer i deras respektive inertialsystem. I Kapitel 1.2 såg vi att elektromagnetism inte bara beskrivs av Maxwells ekvationer utan även av Lorentzkraften. Målet i detta delkapitel är att beskriva Lorentzkraften som en 4-vektor för att i senare kapitel beskriva Maxwells ekvationer på manifest Lorentzinvariant form.

Lorentzkraften beskriver kraften en partikel med laddning q och hastighet $\mathbf{u}$ känner i närvaro av ett elektriskt fält $\mathbb{E}$ och ett magnetiskt fält $\mathbb{B}$. Dess 3-dimensionella form är ($c = 1$)

$$\mathbb{F} = q(\mathbb{E} + \mathbf{u} \times \mathbb{B}). \quad (8.1)$$

Rimligtvis bör även 4-kraften vara proportionell mot laddningen q , eftersom det är en invariant storhet, samt vara linjär mot 4-hastigheten eftersom den 3-dimensionella formen har en del som är det. Nu gör vi följande "gissning" av hur Lorentzkraften ser ut enligt

$$F_\mu = qF_{\mu\nu}U^\nu. \quad (8.2)$$

Här har vi introducerat en tensor av rank två $F_{\mu\nu}$ som får namnet *elektromagnetiska fälttensorn*. Vi minns från Definition 6.1.1 att om det finns två upprepade index kontraheras dessa genom summering. $F_\mu = qF_{\mu\nu}U^\nu$ måste alltså vara en 4-vektor, eftersom ν kontraheras, vilket är precis vad vi vill. Komponenterna till vår gissning är för oss hittills okända och nästa steg blir sedermera att bestämma denna.

OBS! Observera att vi här valt att uttrycka 4-kraften på kovariant form (index nere) istället för kontravariant form (index uppe), vilket användes i Ekvation (7.46). Detta innebär att de tre sista komponenterna skiftar tecken i enlighet med observationen under Definition 6.5.1 på följande vis $F_\mu = \eta_{\mu\rho} F^\rho = \gamma(\mathbb{F} \cdot \mathfrak{u}, -\mathbb{F})$.

Vi vill fortsätta på samma spår som i Kapitel 7.13, där vi bara betraktade massbevarande krafter eftersom vi vet att Lorentzkraften är det. Detta innebär att vi vill att F_μ ska uppfylla sambandet $F_\mu U^\mu = 0$ enligt Ekvation (7.44). Utnyttjar vi detta tillsammans med Ekvation (8.2) får vi följande.

$$F_\mu U^\mu \stackrel{(8.2)}{=} q F_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0 \implies F_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0 \quad (8.3)$$

Detta måste gälla för alla U^μ , vilket efter vi skrivit ut komponenterna i Ekvation (8.3) leder till en intressant slutsats. Eftersom $U^\mu U^\nu = U^\nu U^\mu$ kan vi gruppera termerna enligt nedanstående.

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} U^\mu U^\nu &= F_{00} U^0 U^0 + F_{11} U^1 U^1 + F_{22} U^2 U^2 + F_{33} U^3 U^3 \\ &\quad + U^0 U^1 (F_{01} + F_{10}) + U^0 U^2 (F_{02} + F_{20}) + U^0 U^3 (F_{03} + F_{30}) \\ &\quad + U^1 U^2 (F_{12} + F_{21}) + U^1 U^3 (F_{13} + F_{31}) + U^2 U^3 (F_{23} + F_{32}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Det enda sättet för Ekvation (8.4) att uppfyllas för alla U^μ är om $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, det vill säga att den elektromagnetiska fälttensorn måste vara antisymmetrisk. Notera att diagonalelementen $F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$ i en antisymmetrisk tensor alltid är 0.

Nu kan vi konstruera den elektromagnetiska fälttensorns rumsliga komponenter utifrån att vi matchar dem med komponenterna i det 3-dimensionella fallet. Eftersom Lorentzkraften ska vara på formen enligt Ekvation (8.2) innebär det att komponenterna i $F_{\mu\nu}$ kommer bestå av komponenterna i det elektriska respektive magnetiska fältet. Nu kan vi skriva följande.

$$\begin{aligned} F_\mu &= q F_{\mu\nu} U^\nu \\ &\stackrel{(6.13)}{=} q\gamma(u) \begin{bmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = q\gamma(u) \begin{bmatrix} F_{01}u_x + F_{02}u_y + F_{03}u_z \\ -F_{01} + F_{12}u_y + F_{13}u_z \\ -F_{02} - F_{12}u_x + F_{23}u_z \\ -F_{03} - F_{13}u_x - F_{23}u_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Låt oss se vad händer om vi matchar det här uttrycket med Lorentzkraften (8.1). De tre rumsliga komponenterna av F_μ ska nu vara lika med den 3-dimensionella delen av Lorentzkraften $-\gamma\mathbb{F}$.

$$\begin{aligned} -\gamma\mathbb{F} &= -q\gamma(\mathbb{E} + \mathfrak{u} \times \mathbb{B}) \\ &= -q(E_x + u_y B_z - u_z B_y, E_y + u_z B_x - u_x B_z, E_z + u_x B_y - u_y B_x). \end{aligned}$$

Genom matchning erhålls till slut följande.

$$F_{01} = E_x, F_{02} = E_y, F_{03} = E_z, F_{12} = -B_z, F_{13} = B_y, F_{23} = -B_x$$

Vi definierar den elektromagnetiska fälttensorn enligt nedanstående.

Definition 8.2.1 — Elektromagnetiska fälttensorn.

$$F_{\mu\nu} := \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

För att skriva den elektromagnetiska fälttensorn på kontravariant form behöver man multiplicera med metriken två gånger eftersom två index ska höjas.

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Observera att detta endast kommer byta tecken mellan rad “noll” och kolumn “noll”. Sammanfattningsvis blir därmed Lorentzkraften på manifest Lorentzinvariant form följande.

Definition 8.2.2 — Lorentzkraften på manifest Lorentzinvariant form.

$$F_\mu := q F_{\mu\nu} U^\nu,$$

där q är den invarianta laddningen hos partikeln, $F_{\mu\nu}$ är den elektromagnetiska fälttensorn och U^ν är 4-hastigheten.

Än så länge har vi bara visat att (8.1) är en relativistisk kraft om $F_{\mu\nu}$ är en tensor. Vi måste nu övertyga oss att så är det fallet.

8.3 Kontinuitetsekvationen

Förflyttning av olika kvantiteter beskrivs inom fysik av så kallade kontinuitetsekvationer. Dessa blir extra enkla när konserverade storheter undersöks, vilket är precis vad vi ska studera i detta delkapitel. Inom elektromagnetismen utgör kontinuitetsekvationen en empirisk lag som beskriver laddningskonservering.

Antag först att vi har ett laddat medium med kontinuerlig fördelning av en sorts laddningar med lokal hastighet $\mathfrak{u}(t, \mathfrak{x})$ och låt n vara antalet laddningar per volymsenhet vid en specifik tid mätt i ett inertialsystem S . Låt sedan n_0 vara antalet laddningar per volymsenhet i deras momentana vilosystem S' . På grund av längdkontraktion kommer en volym V i S mätas till $\gamma(u)V$ i S' . Eftersom båda observatörerna i de olika systemen måste vara överens om antalet laddade partiklar i volymen, det vill säga mängden laddning, leder sambandet mellan volymerna till $n = \gamma(u)n_0$. Utifrån detta kan vi definiera laddningstätheterna i de olika systemen som $\rho = qn$ och $\rho_0 = qn_0$, där q är den invarianta laddningen hos varje partikel.

Definition 8.3.1 — Egenladdningstäthet. $\rho_0 := qn_0$ är fördelning av en sorts laddningar som mäts i deras momentana viloinertialsystem.

Detta leder oss till att sambandet mellan laddningstätheterna är

$$\rho = \rho_0 \gamma(u).$$

Innan vi kan introducera kontinuitetsekvationen behöver vi definiera strömtätheten.

Definition 8.3.2 — 3-strömtätheten. Strömtätheten $\mathbb{J}$ är strömmen som vinkelrätt flödar genom en area per areaenhet enligt

$$\mathbb{J} := \rho \mathfrak{u}.$$

Nu presenterar vi den 3-dimensionella kontinuitetsekvationen enligt följande.

8.3.1 — 3-kontinuitetsekvationen.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbb{J} = 0 \quad (8.6)$$

Eftersom $\nabla \cdot \mathbb{J}$ är ett mått på flödet av laddning ut från en infinitesimal volym per tidsenhet säger Ekvation (8.6) att precis för så mycket laddning som lämnar volymen måste den totala laddningen i volymen minska. Därför beskriver kontinuitetsekvationen laddningskonservering, alltså att det inte finns några nettokällor eller sänkor av elektrisk laddning i naturen.

Vi är nu redo att beskriva ovanstående på tensorform. Först introducerar vi 4-strömtätheten som följer.

Definition 8.3.3 — 4-strömtätheten.

$$J^\mu := (\rho, \mathbb{J}) = (\gamma \rho_0, \gamma \rho_0 \mathbf{u}) = \rho_0 U^\mu \quad (8.7)$$

Om det bara finns en typ av laddningsbärare inom den infinitesimala volymen kommer dessa att färdas med samma genomsnittliga hastighet $\mathbf{u}$. Med flera sorters laddningar, som exempelvis elektroner och protoner, skriver vi 4-strömtätheten som summan av laddningarnas strömtätheter enligt

$$J^\mu := \sum_i \rho_{0i} U_i^\mu,$$

där summan är över de olika sorterna av laddningar.

Notera att 3-kontinuitetsekvationen (8.6) innehåller derivator av varje av vektorkomponent. Det blir därför naturligt att formulera Kontinuitetsekvationen på tensorform enligt följande.

8.3.2 — Kontinuitetsekvationen på manifest Lorentzinvariant form.

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (8.8)$$

OBS! Här är ∂_μ en deriveringsoperator som deriverar varje vektorkomponent för sig $\partial_\mu J^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu$. Kontinuitetsekvationen är med andra ord 4-divergensen av 4-strömtätheten. Observera att enligt Ekvation (6.6) kan vi skriva $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$. Notera att det kontravarianta indexet μ i x^μ har blivit kovariant i $\frac{\partial}{\partial x'^\mu}$. Det är anledningen till att vi skriver $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$.

Eftersom vänsterledet i Ekvation (8.8) är en divergens genererar det per definition en skalär. I högerledet har vi dessutom skalären 0, vilket innebär att kontinuitetsekvationen på manifest Lorentzinvariant form är en Lorentzinvariant ekvation.

8.4 Maxwells ekvationer

Maxwells ekvationer minns vi från Kapitel 1.2 och består av följande lagar, när vi sätter $c = 1$.

$\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho$	Gauss lag
$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$	Gauss lag för magnetism
$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$	Faradays induktionslag
$\nabla \times \mathbb{B} = \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$	Ampères lag med Maxwells korrektionsterm

Dessa är skrivna på den 3-dimensionella formen som vi är vana vid, men vi ska här se hur de också kan skrivas på manifest Lorentzinvariant form. Genom att betrakta Maxwells ekvationer i 3-dimensionell form, 4-strömtätheten J^μ enligt Ekvation (8.7) samt den elektromagnetiska fälttensorn $F_{\mu\nu}$ från Ekvation (8.5) kan man "gissa" Maxwells ekvationer på manifest Lorentzinvariant form enligt följande.

8.4.1 — Maxwells ekvationer på manifest Lorentzinvariant form.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (8.9)$$

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0 \quad (8.10)$$

Vi kan verifiera att dessa ekvationer överensstämmer med Maxwells ekvationer på 3-dimensionell form genom att sätta in olika värden på indexen i Ekvation (8.9) och (8.10). Ekvation (8.9) med $\nu = 0$ ger

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= J^0 \\ \implies \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \rho \\ \implies 0 + \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z &= \rho \\ \implies \nabla \cdot \mathbb{E} &= \rho, \end{aligned}$$

vilket identifieras som Gauss lag. Med $\nu = 1$ i Ekvation (8.9) erhålls

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 1} &= J^1 \\ \implies \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= J_x \\ \implies -\frac{\partial}{\partial t} E_x + 0 + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y &= J_x \\ \implies -\frac{\partial}{\partial t} E_x + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y &= J_x, \end{aligned}$$

som är x -komponenten av Ampères lag med Maxwells korrektion

$$\nabla \times \mathbb{B} - \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = \mathbb{J}.$$

y - och z -komponenterna av Ampères lag med Maxwells korrektion fås med $\nu = 2$ respektive $\nu = 3$ i Ekvation (8.9), alltså kan Ampères lag erhållas från Maxwells ekvationer på manifest Lorentzinvariant form.

De två sista av Maxwells ekvationer, Gauss lag för magnetism och Faradays induktionslag, fås från Ekvation (8.10). Genom att exempelvis sätta $\sigma = 1$, $\mu = 2$ och $\nu = 3$ i Ekvation (8.10) erhålls

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} &= 0 \\ \implies -\frac{\partial}{\partial x} B_x - \frac{\partial}{\partial y} B_y - \frac{\partial}{\partial z} B_z &= 0 \\ \implies \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z &= 0 \\ \implies \nabla \cdot \mathbb{B} &= 0, \end{aligned}$$

vilket beskriver Gauss lag för magnetism. Slutligen erhålls genom att sätta $\sigma = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 2$ i

Ekvation (8.10)

$$\begin{aligned}\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} &= 0 \\ \implies -\frac{\partial}{\partial t} B_z - \frac{\partial}{\partial x} E_y + \frac{\partial}{\partial y} E_x &= 0 \\ \implies \frac{\partial}{\partial t} B_z + \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x &= 0,\end{aligned}$$

vilket identifieras som z -komponenten i Faradays induktionslag

$$\nabla \times \mathbb{E} + \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

x - och y -komponenterna fås med $\sigma = 0, \mu = 2, \nu = 3$ respektive $\sigma = 0, \mu = 3, \nu = 1$.

Vi har alltså sett att Maxwells ekvationer på manifest Lorentzinvariant form kan skrivas enligt Ekvation (8.9) och (8.10) och att vi från dem kan återfå Maxwells ekvationer på 3-dimensionell form. Man kan också se att kontinuitetsekvationen, Ekvation (8.8) är en nödvändig följd av Maxwells ekvationer, Ekvation (8.9), genom att lägga till en derivata ∂_ν på båda sidor. I vänsterledet får man då $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ eftersom $\partial_\nu \partial_\mu$ är symmetrisk och $F^{\mu\nu}$ är antisymmetrisk. Tillsammans med högerledet fås att $\partial_\nu J^\nu = 0$, vilket är kontinuitetsekvationen.

Vi har nu visat att alla ekvationer i elektromagnetismen är relativistisk invarianta om vi antar att $F_{\mu\nu}$ transformerar som en tensor. Ingen ändring behövs göras (till skillnad med Newtons mekanik).

8.5 Gaugepotentialen

Det elektriska fältet $\mathbb{E}$ och den magnetiska flödestätheten $\mathbb{B}$ i Maxwells ekvationer kan uttryckas med den elektriska skalärpotentialen V och den magnetiska vektorpotentialen $\mathbb{A}$ enligt

$$\mathbb{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \quad \text{och} \quad \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}. \quad (8.11)$$

På liknande sätt kan vi också uttrycka den elektromagnetiska fälttensorn med en 4-dimensionell potential A_μ , gaugepotentialen, som vi ska se har en tydlig koppling till skalär- och vektorpotentialerna.

OBS! Notera att vi betecknar både 4-accelerationen och gaugepotentialen med A^μ . Det är oftast tydligt från sammanhanget om det rör sig om 4-accelerationen eller gaugepotentialen. I resten av detta kapitel betecknar A^μ alltid gaugepotentialen, förutom i Kapitel 8.9 där 4-accelerationen dyker upp igen.

Tittar vi noggrannare på den andra av Maxwells ekvationer på manifest Lorentzinvariant form, Ekvation (8.10), inses att om vi uttrycker den elektromagnetiska fälttensorn som

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.12)$$

och sätter in detta i vänsterledet av Ekvation (8.10) erhålls

$$\begin{aligned}\partial_\sigma (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu (\partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\sigma A_\mu - \partial_\mu A_\sigma) \\ = \partial_\sigma \partial_\mu A_\nu - \partial_\sigma \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu A_\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma A_\nu + \partial_\nu \partial_\sigma A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu A_\sigma = 0,\end{aligned}$$

där termerna tar ut varandra eftersom derivatornas ordning inte spelar någon roll. Vi ser att detta stämmer överens med Ekvation (8.10) och har därför funnit att den elektromagnetiska fälttensorn kan uttryckas i gaugepotentialen A_μ enligt Ekvation (8.12), på ett sätt som uppfyller den andra av Maxwells ekvationer på manifest Lorentzinvariant form.

Nu kan vi genom att jämföra Ekvation (8.12) med uttrycken för det elektriska fältet och den magnetiska flödestätheten i potentialerna V och $\mathbb{A}$, Ekvation (8.11), se hur gaugepotentialen kan uttryckas i V och $\mathbb{A}$. Vi börjar med ekvationen $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$ som exempelvis ger oss att

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y, \quad (8.13)$$

men från den elektromagnetiska fälttensorn vet vi också att $B_x = F_{32}$, vilket med Ekvation (8.12) blir

$$B_x = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = \frac{\partial}{\partial y} A_3 - \frac{\partial}{\partial z} A_2. \quad (8.14)$$

Eftersom Ekvation (8.13) och (8.14) ska vara identiska får vi att $A_2 = -A_y$ och $A_3 = -A_z$. Sätts motsvarande uttryck upp för B_y eller B_z erhålls också att $A_1 = -A_x$. För att bestämma A_0 skriver vi exempelvis E_x enligt Ekvation (8.11) som

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} V - \frac{\partial}{\partial t} A_x. \quad (8.15)$$

Vi har också att $E_x = F_{01}$, vilket enligt Ekvation (8.12) ger

$$E_x = \frac{\partial}{\partial t} A_1 - \frac{\partial}{\partial x} A_0. \quad (8.16)$$

Eftersom Ekvation (8.15) och (8.16) ska vara identiska får vi att $A_1 = -A_x$, vilket vi redan visste, och $A_0 = V$. Gaugepotentialen kan alltså skrivas kovariant som $A_\mu = (V, -\mathbb{A})$. För att skriva gaugepotentialen kontravariant höjer vi indexet med metriken enligt $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu = (V, \mathbb{A})$.

Definition 8.5.1 — Gaugepotentialen. Den elektromagnetiska 4-potentialen, gaugepotentialen, ges av

$$A^\mu := (V, \mathbb{A})$$

där V är den elektriska skalärpotentialen och $\mathbb{A}$ är den magnetiska vektorpotentialen.

Sätts uttrycket för den elektromagnetiska fälttensorn, Ekvation (8.12), in i den första av Maxwells ekvationer på manifest Lorentzinvariant form, Ekvation (8.9), erhålls

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = J^\nu. \quad (8.17)$$

Notera att om vi lägger till en term på gaugepotentialen A_μ , i form av $\partial_\mu \psi$, där ψ betecknar ett godtyckligt skalärfält, och skriver $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \psi$, så är den elektromagnetiska fälttensorn oförändrad. Sätts den nya potentialen in i Ekvation (8.12) erhålls nämligen

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu \\ &= \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \psi) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \psi) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \cancel{\partial_\mu \partial_\nu \psi} - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu \psi} \\ &= F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Vi har alltså en viss valfrihet över hur vi väljer potentialen A_μ så att den ger ett uttryck enligt Ekvation (8.12) som uppfyller Maxwells ekvationer. Exempelvis kan vi välja A_μ så att den uppfyller det så kallade *Lorenz villkoret*¹ $\partial_\mu A^\mu = 0$. Detta ger insatt i Ekvation (8.17)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu. \quad (8.18)$$

Hur denna ekvation löses för att hitta ett uttryck för $A^\mu(t, \mathbf{x})$ visas i nästa delkapitel.

¹*Lorenz gauge* på engelska. Värt att påpeka är att Lorenz och Lorentz var två olika personer!

8.6 Strålning från rörlig laddning (Lienard-Wiechert) med Greensfunktioner

I detta delkapitel beskriver vi en generell metod för att lösa differentialekvationer för att sedan använda denna metod på Ekvation (8.18). Lösningen används sedan för att bestämma potentialen som skapas då källan är en laddad partikel i rörelse. Ekvationen

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu$$

är ett exempel på en differentialekvation som kan lösas med vad som kallas för en *Greensfunktion*. En Greensfunktion är impulsresponsen för en inhomogen linjär differentialekvation, det vill säga lösningen till differentialekvationen om inhomogentermen är en deltadistribution.

Låt oss börja med att titta på en 3D situation där $\mathbf{x}$ är rumskoordinaterna. Generellt gäller det att om man har en differentialekvation $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x})) = g(\mathbf{x})$ där $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ är en linjär differentialoperator så ges dess Greensfunktion G av $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(G(\mathbf{x})) = \delta(\mathbf{x})$. Lösningen $f(\mathbf{x})$ ges sedan av

$$f(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (8.19)$$

detta eftersom

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x})) = \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\left(\int G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}\right) = \int \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(G(\mathbf{x} - \mathbf{y})) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = g(\mathbf{x}).$$

I vårt fall är Greensfunktionen G den funktion som uppfyller $(\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2)$

$$(\partial_t^2 - \nabla^2) G(t, \mathbf{x}) = \delta(t) \delta(\mathbf{x}).$$

Denna ekvation kan lösas genom att Fouriertransformera i t och få

$$(k^2 + \nabla^2) \tilde{G}(k, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (8.20)$$

där $\tilde{G}(k, \mathbf{x})$ är Fouriertransformen av $G(t, \mathbf{x})$ enligt

$$\tilde{G}(k, \mathbf{x}) = \int G(t, \mathbf{x}) e^{-ikt} dt.$$

För $\mathbf{x} \neq 0$ och genom att använda rotationssymmetri förenklas Ekvation (8.20) till

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \tilde{G}(k, r)) + k^2 \tilde{G}(k, r) = 0,$$

som har de normerade lösningarna

$$\tilde{G}(k, r) = \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}.$$

Vår Greensfunktion $G(t, r)$ ges då av den inversa Fouriertransformen av $\tilde{G}(k, r)$ enligt

$$G_{\pm}(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{4\pi r} e^{ik(t \pm r)} dk = \delta(t \pm r) \frac{1}{4\pi r},$$

där vi väljer den fysikaliskt meningsfulla lösningen med negativt tecken. Lösningen med positivt tecken skulle leda till att potentialen beror på framtida händelser.

Denna Greensfunktion sätts in i Ekvation (8.19) tillsammans med $A^\mu(t, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ och $J^\mu(t, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y})$ för att få ett uttryck för $A^\mu(t, \mathbf{x})$, ($r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$):

$$\begin{aligned} A^\mu(t, \mathbf{x}) &= \int d^3\mathbf{y} dt' \delta(t - t' - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} J^\mu(t', \mathbf{y}) \\ &= \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} J^\mu(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Man kan kolla att A^μ också uppfyller Lorentzvillkoret. Vi uttrycker nu $J^\mu(t, \mathbf{y})$ för en partikel som rör sig längs banan $\mathbf{r}(t)$ enligt

$$J^\mu(t, \mathbf{y}) = (\rho(t, \mathbf{y}), \mathbb{J}(t, \mathbf{y}))$$

där

$$\rho(t, \mathbf{y}) = q\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{r}(t)) \quad \text{och} \quad \mathbb{J}(t, \mathbf{y}) = q\dot{\mathbf{r}}(t)\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{r}(t)).$$

Sätts detta in i Ekvation (8.21) beräknas $A^0 = V(t, \mathbf{x})$ till

$$\begin{aligned} V(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \rho(\mathbf{r}(t - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|), \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} q\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{r}(t - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} d\tilde{t} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} q\delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{r}(\tilde{t})) \delta(\tilde{t} - t + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\tilde{t} \frac{1}{|\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}|} q\delta(\tilde{t} - t + |\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}|) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{q}{|\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}| \left(1 + \frac{(\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\tilde{t})}{|\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}|}\right)} \bigg|_{\tilde{t}: \tilde{t} - t + |\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}| = 0}. \end{aligned}$$

Motsvarande beräkning för $\mathbb{A}(t, \mathbf{x})$ ger att

$$\mathbb{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q \dot{\mathbf{r}}(\tilde{t})}{|\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}| \left(1 + \frac{(\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\tilde{t})}{|\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}|}\right)} \bigg|_{\tilde{t}: \tilde{t} - t + |\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}| = 0}.$$

Notera att $\tilde{t} - t + |\mathbf{r}(\tilde{t}) - \mathbf{x}| = 0$ är en implicit ekvation för $\tilde{t}$ som ska lösas för en given ekvation för banan $\mathbf{r}(\tilde{t})$.

8.7 Minsta verkans princip

Vi ska nu presentera ett begrepp som kan användas för att beskriva dynamiken i ett fysikaliskt system från vilken systemets rörelseekvationer kan genereras. Detta begrepp kallas *minsta verkans princip* där *verkan*² betecknas $\mathcal{S}$. Verkan är en *funktional* som tar in en funktion som argument och ger tillbaka ett tal. Dessa funktioner beskriver ofta vägen för exempelvis en partikel som rör sig i ett potentialfält mellan två bestämda punkter under ett tidsintervall. Beroende på vilken av dessa vägar partikeln tar blir $\mathcal{S}$ olika. Verkan har dimensionen [energi] · [tid] och således SI-enheter joule-sekund. Definitionen av verkan ser ut som följande.

²Action på engelska.

Definition 8.7.1 — Verkan för ändligt antal partiklar eller frihetsgrader.

$$\mathcal{S}[q(t)] := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}[\dot{q}(t), q(t), t] dt \quad (8.22)$$

Här är $q(t)$ en generaliserad koordinat som har fixerade start- och slutpunkter $q_1 = q(t_1)$ och $q_2 = q(t_2)$ under tidsutvecklingen t_1 till t_2 . $\mathcal{L}$ är den så kallade *Lagrangefunktionen*.

Målet är att kunna använda verkan $\mathcal{S}$ för att få fram systemets rörelseekvationer. Det finns oändligt många olika vägar som en partikel kan ta mellan två punkter under en bestämd tid. Frågan är då vilken av dessa vägar som är den "rätta", alltså den väg som partikeln faktiskt kommer färdas längs. Det visar sig att den rätta vägen är den som minimerar verkan och det är detta som kallas minsta verkans princip.

8.7.1 — Minsta verkans princip. Vägen som systemet tar mellan tiderna t_1 och t_2 för de generaliserade koordinaterna $q(t)$ ges som den väg för vilken verkan $\mathcal{S}$ är stationär.

För funktioner som är stationära till första ordningen kommer en liten förflyttning $\delta q(t)$ inte att förändra funktionsvärdet nämnvärt. Denna egenskap kan vi använda för att hitta den rätta vägen. Med andra ord, om vi har den rätta vägen, $q(t)$, och en kurva som bara skiljer lite från den, $q(t) + \delta q(t)$, kommer dessa till första ordningen ha samma $\mathcal{S}$. Problemet reduceras till att lösa vilka $q(t)$ som uppfyller till första ordningen

$$\delta \mathcal{S} = \mathcal{S}[q(t) + \delta q(t)] - \mathcal{S}[q(t)] = 0. \quad (8.23)$$

Notera att δq , som är skillnaden från den rätta vägen, måste försvinna vid kurvans start och slutpunkt eftersom de olika kurvorna ska starta och sluta vid samma position. Därmed är $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Oftast kan t_1 och t_2 tänkas $\rightarrow \pm\infty$. Analysen av att studera små variationer på detta sätt är en gren inom matematiken som kallas för *variationskalkyl*.

I och med detta är vårt matematiska problem definierat. Vi ska i följande två delkapitel först se hur man kommer fram till rörelseekvationerna för en icke-relativistisk partikel, för att sedan avsluta med hur variationskalkyl kan kopplas till elektrodynamik i 4-vektornotation.

8.7.1 Icke-relativistisk partikel i ett endimensionellt potentialfält

Vi vill nu med hjälp av minsta verkans princip försöka komma fram till rörelseekvationerna för en icke-relativistisk partikel i ett endimensionellt potentialfält. Då behöver vi Lagrangefunktionen som för icke-relativistiska fallet definieras enligt följande.

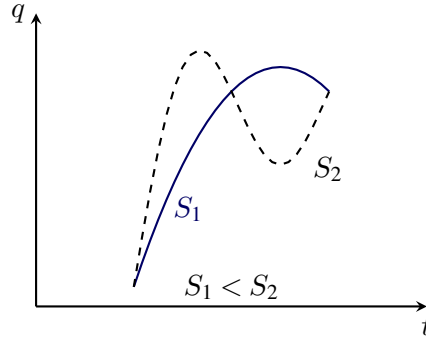
Definition 8.7.2 — Icke-relativistisk Lagrangefunktion för en partikel.

$$\mathcal{L} := T - V$$

där $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ är systemets totala kinetiska energi och $V(q)$ systemets potentiella energi.

Nu kan vi enligt Ekvation (8.22) ställa upp följande verkan

$$\mathcal{S}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \right) dt.$$



Figur 8.1: Figuren illustrerar två möjliga vägar för partikeln att färdas mellan start- och slutpunkt. Olika vägar kan ge olika värden på verkan $\mathcal{S}$.

Jämför vi denna verkan med en liten skillnad $q(t) + \delta q(t)$ kan vi enligt Ekvation (8.23) genomföra följande beräkning.

$$\delta \mathcal{S} = \mathcal{S}[q(t) + \delta q(t)] - \mathcal{S}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m (\dot{q} + \delta \dot{q})^2 - V(q + \delta q) - \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \right) dt = 0.$$

Utveckla kvadraten $(\dot{q} + \delta \dot{q})^2$ och Taylorutveckla $V(q + \delta q)$.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\cancel{\frac{1}{2} m \dot{q}^2} + \frac{1}{2} 2 m \dot{q} \delta \dot{q} + \frac{1}{2} m \delta \dot{q}^2 - \cancel{\frac{1}{2} m \dot{q}^2} + \cancel{V(q)} - \cancel{V(q)} - \delta q V'(q) + \mathcal{O}(\delta q^2) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} 2 m \dot{q} \delta \dot{q} + \frac{1}{2} m \delta \dot{q}^2 - \delta q V'(q) + \mathcal{O}(\delta q^2) \right) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Försumma högre ordningens termer i δq och $\delta \dot{q}$.

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} (m \dot{q} \delta \dot{q} - \delta q V'(q)) dt = 0.$$

Utnyttja att $\dot{q} \delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\dot{q} \delta q) - \delta q \ddot{q}$.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(m \frac{d}{dt}(\dot{q} \delta q) - m \ddot{q} \delta q - \delta q V'(q) \right) dt \\ &= [m \dot{q} \delta q]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (m \ddot{q} + V'(q)) \delta q dt \\ &= 0, \quad \forall \delta q. \end{aligned}$$

Här är $[m \dot{q} \delta q]_{t_1}^{t_2} = 0$ eftersom $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Detta medför att

$$m \ddot{q} + V'(q) = 0,$$

vilket är precis vad vi identifierar som Newtons andra lag $F = ma$ för en partikel i ett endimensionellt potentialfält där $F = -V'(q)$. Vi har därmed kommit fram till systemets rörelseekvationer med hjälp av minsta verkans princip.

Utifrån detta exempel kan variationskalkyl verka överflödigt, eftersom vi kom fram till ett resultat vi redan kände till, men minsta verkans princip är oerhört användbar inom följande exempel.

1. Inom mekanik och beräkningsvetenskap där det finns tvång.
2. Symmetrierna och de konserverade storheterna i ett system är ofta enklare att identifiera via Lagrangefunktionen än direkt från rörelseekvationerna.
3. Kvantisering av ett fält är mycket enklare om en verkan används (*Feynmans vägintegral*) än om Schrödingerekvationen används.

8.7.2 Minsta verkans princip inom elektromagnetism

Vi ska nu istället studera hur man med minsta verkans princip kan komma fram till Maxwells ekvationer för elektromagnetiska fält som kan växelverka med externa laddningar och strömmar. Tillvägagångssättet är ganska likt det i Kapitel 8.7.1, därför behöver vi hitta en lämplig *Lagrange-täthet*. (En Lagrangetäthet, integrerad över rumskoordinaterna ger Lagrangefunktionen.) Eftersom verkan inte ska bero på vilket inertialsystem vi väljer vill vi att Lagrangietätheten ska vara Lorentzinvariant och integrerbar över alla fyra dimensioner. Notera att Maxwells ekvationer (8.9) innehåller den elektromagnetiska fälttensorn $F_{\mu\nu}$, vilken i sin tur kopplar till $\mathbb{E}$ och $\mathbb{B}$. Ett sätt att erhålla en Lorentzinvariant skalär innehållande $F_{\mu\nu}$ är exempelvis genom $\mathcal{L}_{\text{fri}} \propto F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, där "fri" innebär att termen inte tar hänsyn till några externa källor. Skulle det däremot finnas laddade partiklar i systemet som agerar som en källa tillkommer en term vilken rimligtvis är proportionell mot strömtätheten och hur den kopplar till fälten. Den skulle exempelvis kunna vara på formen $\mathcal{L}_{\text{int}} \propto A_\mu J^\mu$, där "int" innebär hur fälten växelverkar med den externa källan. Vi gör nu följande "gissning" på den totala Lagrangetätheten och kollar att vi återfår Maxwells ekvationer.

Definition 8.7.3 — Elektromagnetisk Lagrangetäthet på manifest Lorentzinvariant form.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\nu J^\nu, \quad (8.24)$$

där faktorn $1/4$ och minustecknen är nödvändigt för att kunna skriva Maxwells ekvationer enligt Ekvation (8.9), vilket visas nedan.

Vi såg i Ekvation (8.12) att elektromagnetiska fälttensorn kan skrivas i termer av gaugepotentialen A_μ enligt $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, vilket innebär att hela Lagrangianen i Ekvation (8.24) beror av just A_μ . Vi vill alltså undersöka små skillnader i vektorpotentialen $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ eftersom verkan ska vara stationär till första ordningen. Precis som tidigare måste $\delta A_\mu \rightarrow 0$ när en eller flera koordinater $x^\mu \rightarrow \pm\infty$. Eftersom vi nu skriver i manifest Lorentzinvariant form blir verkan på formen

$$\mathcal{S}[A_\mu] = \int \mathcal{L} d^4x.$$

Notera att integralen är Lorentzinvariant: $d^4x = d^4x'$ p.g.a. att $|\det\Lambda| = 1$. Nu gör vi följande beräkning enligt Ekvation (8.23).

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \mathcal{S}[A_\mu + \delta A_\mu] - \mathcal{S}[A_\mu] \\ &= - \int \left(\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu}) (F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu}) + \cancel{A_\nu J^\nu} + \delta A_\nu J^\nu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \cancel{A_\nu J^\nu} \right) d^4x \\ &= - \int \left(\frac{1}{4} (\cancel{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - \cancel{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}) + \delta A_\nu J^\nu \right) d^4x \\ &= - \int \left(\frac{1}{4} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) + \delta A_\nu J^\nu \right) d^4x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Försumma högre ordningens termer i $\delta F_{\mu\nu}$.

$$\delta\mathcal{S} = - \int \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta A_\nu J^\nu \right) d^4x = 0$$

Använd $F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$.

$$\delta\mathcal{S} = - \int \left(\frac{1}{2} \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta A_\nu J^\nu \right) d^4x = 0$$

Använd $\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu$.

$$\delta \mathcal{S} = - \int \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) F^{\mu\nu} + \delta A_\nu J^\nu \right) d^4x = 0$$

Eftersom $F^{\mu\nu}$ är antisymmetrisk är $\partial_\mu \delta A_\nu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu \delta A_\mu F^{\mu\nu}$.

$$\delta \mathcal{S} = - \int (\partial_\mu \delta A_\nu F^{\mu\nu} + \delta A_\nu J^\nu) d^4x = 0$$

Utnyttja $\partial_\mu \delta A_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\delta A_\nu F^{\mu\nu}) - \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$.

$$\delta \mathcal{S} = - \int (\partial_\mu (\delta A_\nu F^{\mu\nu}) - \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \delta A_\nu J^\nu) d^4x = 0$$

Utnyttja $\int \partial_\mu (\delta A_\nu F^{\mu\nu}) d^4x = 0$ på grund av randvillkoren.

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S} &= \int \delta A_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu) d^4x = 0, \quad \forall \delta A_\nu \\ \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu, \end{aligned}$$

vilket är precis de inhomogena Maxwells ekvationerna (8.9). (De homogena ekvationerna är alltid uppfyllda om $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.)

8.8 Stressenergiteatern

I det föregående kapitlet presenterades minsta verkans princip. Här ska vi använda Lagrangefunktionen/Lagrangetätheten på ett annat sätt för att se hur vi, genom att göra en specifik variation av denna, kan komma fram till energibevarende för en icke-relativistisk partikel och sedan, genom att göra samma sak inom elektromagnetism, ta fram det som kallas för stressenergiteatern.

8.8.1 Energibevarende för en icke-relativistisk partikel i ett potentialfält

Vi börjar med den icke-relativistiska partikeln i ett potentialfält, som vi betraktade i Kapitel 8.7.1, med Lagrangefunktionen

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q). \quad (8.25)$$

Vi väljer att $V(q)$ inte beror explicit på tiden, men bara genom beroende av q . Vi bildar nu en specifik variation i vägen som partikeln tar, $q(t)$, genom att förskjuta den i tiden med en liten parameter ϵ . Variationen skriver vi som

$$\Delta_\epsilon q = q(t + \epsilon) - q(t) \approx q(t) + \epsilon \dot{q}(t) - q(t) = \epsilon \dot{q}(t),$$

där vi har Taylorutvecklat $q(t + \epsilon)$ till första ordningen i ϵ och alltså försummar termer av ordning ϵ^2 och högre. Notera att vi kräver *inte* att $\Delta_\epsilon q$ är noll vid ändpunkterna.

Ändringen i Lagrangefunktionen, som beror på $\dot{q}$ och q , kan vi nu beräkna på två sätt. Först skriver vi ändringen i Lagrangefunktionen på samma sätt som för $\Delta_\epsilon q$ enligt

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t + \epsilon), \dot{q}(t + \epsilon)) - \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \epsilon \frac{d}{dt} \mathcal{L}. \quad (8.26)$$

Detta använder vi också som vår definition för symmetri. Vi säger att en transformation där Lagrangefunktionen ändras som mest med en total tidsderivata är en symmetri. De flesta symmetrier uppfyller att $\Delta_\epsilon \mathcal{L} = 0$, men när vi ändrar på rumtidskoordinaterna måste vi generalisera begreppet enligt definitionen nedan.

Definition 8.8.1 — Symmetri. En transformation där $\mathcal{L}$ ändras som mest med en total tidsderivata enligt

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \epsilon \frac{d}{dt} \mathcal{L}$$

är en symmetri. Detta gör så att rörelseekvationerna är invarianta.

Ett andra sätt som vi kan beskriva $\Delta_\epsilon \mathcal{L}$ på är genom att göra en Taylorutveckling i q och $\dot{q}$ och skriva

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\Delta_\epsilon q) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \Delta_\epsilon q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\epsilon \dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \epsilon \dot{q}. \quad (8.27)$$

För att beräkna detta använder vi att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \epsilon \dot{q} \right) &= \epsilon \dot{q} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\epsilon \dot{q}) \\ \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\epsilon \dot{q}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \epsilon \dot{q} \right) - \epsilon \dot{q} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Sätts Ekvation (8.28) in i Ekvation (8.27) erhålls

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \epsilon \dot{q} \right) - \epsilon \dot{q} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \epsilon \dot{q}. \quad (8.29)$$

Vi använder nu att uttrycket för Lagrangetätheten ges av Ekvation (8.25), vilket gör att

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} = -V'(q).$$

Insatt i Ekvation (8.29) ger det

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \frac{d}{dt} (m\dot{q}\epsilon\dot{q}) - \epsilon\dot{q} \frac{\partial}{\partial t} (m\dot{q}) - V'(q)\epsilon\dot{q} = \frac{d}{dt} (\epsilon m\dot{q}^2) - \epsilon\dot{q} (m\ddot{q} + V'(q)). \quad (8.30)$$

Uttrycket innanför parentesen i den andra termen i Ekvation (8.30) känner vi igen som rörelseekvationen för den icke-relativistiska partikeln i ett potentialfält. Då vår partikel uppfyller rörelseekvationerna kan vi stryka den termen. Det vi har kvar för uttrycket av $\Delta_\epsilon \mathcal{L}$ är då

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \epsilon \frac{d}{dt} (m\dot{q}^2), \quad (8.31)$$

där vi kan flytta ut ϵ ur tidsderivatan eftersom ϵ bara är ett tal som inte beror på t .

De två uttrycken för $\Delta_\epsilon \mathcal{L}$, Ekvation (8.26) och (8.31), måste vara lika. När vi sätter dem lika med varandra får vi

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{d}{dt} (m\dot{q}^2) &= \epsilon \frac{d}{dt} \mathcal{L} \\ \implies \frac{d}{dt} (m\dot{q}^2 - \mathcal{L}) &= 0 \\ \implies \frac{d}{dt} \left(m\dot{q}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \right) \right) &= 0 \\ \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Här ser vi att uttrycket innanför tidsderivatan måste vara konstant över tid, detta är exakt uttrycket för energin hos en icke-relativistisk partikel i en potential $V(q)$. Vi har alltså visat att energin är bevarad över tid för en icke-relativistisk partikel i ett potentialfält som inte beror på tiden. Symmetrin under $t \rightarrow t + \epsilon$ leder till en bevarad storhet.

Återigen kan variationskalkyl verka överflödigt eftersom vi kom fram till något vi redan känner till, men fördelen är att det lätt kan generaliseras till fältteori som vi ska se nedan.

8.8.2 Elektromagnetism och stressenergiteensorn

Vi vill nu göra samma sak som vi gjorde för den icke-relativistiska partikeln, men inom elektromagnetism för att komma fram till stressenergiteensorn, nämligen energi och rörelsemängdstätheten av det elektromagnetiska fältet. För att hitta stressenergiteensorn utgår vi från Lagrangetätheten i Ekvation (8.24), men här utan externa källor enligt, för att vi är bara intresserad i bidraget av det elektromagnetiska fältet.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Här kan vi nu sätta in uttrycket för den elektromagnetiska fältteensorn uttryckt i gaugepotentialen för att få ett uttryck för Lagrangetätheten i gaugepotentialen, som vi ska använda senare. Sätter vi in att $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, erhålls

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu). \end{aligned}$$

Detta kan förenklas genom att inse att $\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu = \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu$ och $\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu = \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu$, eftersom vi är fria att byta namn på indexen. Lagrangetätheten blir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu). \quad (8.32)$$

För att nu hitta stressenergiteensorn gör vi en liknande räkning som i Kapitel 8.8.1. På samma sätt som vi förut gjorde en specifik skillnad i vägen som partikeln tog, gör vi här istället en specifik skillnad i gaugepotentialen. Vi skriver

$$\Delta_\epsilon A_\mu = A_\mu(x + \epsilon) - A_\mu(x) = \epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu, \quad (8.33)$$

där ϵ^ν är en 4-vektor som parametriserar en translation i både rum och tid. Analogt med Ekvation (8.26) kan ändringen i Lagrangetätheten skrivas som

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \epsilon^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (8.34)$$

På det andra sättet, analogt med Ekvation (8.27), erhålls med hjälp av Ekvation (8.33)

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\mu (\Delta_\epsilon A_\nu) + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \Delta_\epsilon A_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\mu (\epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu). \quad (8.35)$$

Vi stryker här den andra termen i Ekvation (8.35) eftersom Lagrangetätheten inte är direkt beroende av A_ν , vilket gör att $\partial \mathcal{L} / \partial A_\nu = 0$. Vi utnyttjar nu, på liknande sätt som förut, att

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \right) &= \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\mu (\epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu) \\ \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\mu (\epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \right) - \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right). \end{aligned}$$

Sätts detta in i Ekvation (8.35) erhålls

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \right) - \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right). \quad (8.36)$$

Vi använder nu uttrycket som beräknades för Lagrangetätheten i Ekvation (8.32) för att beräkna den partiella derivatan av $\mathcal{L}$ med avseende på $\partial_\mu A_\nu$. För att beräkna denna kan vi först välja att skriva Lagrangianen med index σ och ρ enligt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\sigma A_\rho \partial^\sigma A^\rho - \partial_\sigma A_\rho \partial^\rho A^\sigma)$$

och får då följande uttryck för derivatan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\sigma A_\rho \partial^\sigma A^\rho) - \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\sigma A_\rho \partial^\rho A^\sigma) \right). \quad (8.37)$$

Vi börjar med att beräkna den första termen innanför parentesen enligt följande

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\sigma A_\rho \partial^\sigma A^\rho) &= \partial^\sigma A^\rho \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\sigma A_\rho) + \partial_\sigma A_\rho \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial^\sigma A^\rho) \\ &= \partial^\sigma A^\rho \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu + \partial_\sigma A_\rho \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\eta^{\sigma\lambda} \eta^{\rho\tau} \partial_\lambda A_\tau) \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial_\sigma A_\rho \eta^{\sigma\lambda} \eta^{\rho\tau} \delta_\lambda^\mu \delta_\tau^\nu \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu = 2\partial^\mu A^\nu, \end{aligned}$$

där metriken används för att höja och sänka index och δ_ν^μ är Kroneckers delta. Den andra termen i Ekvation (8.37) beräknas på liknande sätt och ger

$$\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\sigma A_\rho \partial^\rho A^\sigma) = 2\partial^\nu A^\mu.$$

Insatt i Ekvation (8.37) erhålls nu för derivatan av Lagrangetätheten med avseende på $\partial_\mu A_\nu$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} (2\partial^\mu A^\nu - 2\partial^\nu A^\mu) = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu = -F^{\mu\nu}.$$

Sätts detta uttryck in i Ekvation (8.36) erhålls

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \partial_\mu (-F^{\mu\nu} \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu) + \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}.$$

I den andra termen identifierar vi att Maxwells ekvationer utan källa ger att $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, vilket gör att den termen kan strykas. Det slutliga uttrycket blir

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = \partial_\mu (-F^{\mu\nu} \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \right). \quad (8.38)$$

De båda uttrycken, Ekvation (8.34) och (8.38), kan nu sättas lika. Då erhålls

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu \right) &= \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \\ \implies \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \epsilon^\rho \partial_\rho A_\nu - \epsilon^\mu \mathcal{L} \right) &= 0 \\ \implies \epsilon^\rho \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\rho A_\nu - \delta_\rho^\mu \mathcal{L} \right) &= 0, \end{aligned}$$

där vi i det sista steget utnyttjar att ϵ^ρ kan brytas ut genom att skriva $\epsilon^\mu = \epsilon^\rho \delta^\mu_\rho$. Uttrycket innanför parentesen måste vara bevarat och är uttrycket för den *kanoniska* stressenergiteusorn, $T_{\text{kan}\rho}^\mu$.

Definition 8.8.2 — Kanoniska stressenergiteusorn.

$$T_{\text{kan}\rho}^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\rho A_\nu - \delta_\rho^\mu \mathcal{L} = -F^{\mu\nu} \partial_\rho A_\nu + \frac{1}{4} \delta_\rho^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Den kanoniska stressenergiteusorn är dock inte symmetrisk, $T_{\text{kan}}^{\mu\rho} \neq T_{\text{kan}}^{\rho\mu}$, men det går att fixa genom att lägga till en term. Vi bildar den *symmetriska* stressenergiteusorn som följer.

Definition 8.8.3 — Symmetriska stressenergiteusorn.

$$T_{\text{sym}}^{\mu\rho} := T_{\text{kan}}^{\mu\rho} + F^{\mu\nu} \partial_\nu A^\rho$$

Detta funkar eftersom den nya termen också är bevarad då vi kan skriva

$$F^{\mu\nu} \partial_\nu A^\rho = \partial_\nu (F^{\mu\nu} A^\rho) \quad \text{och} \quad \partial_\mu \partial_\nu (F^{\mu\nu} A^\rho) = 0$$

eftersom derivatan är symmetrisk medan den elektromagnetiska fälttensorn är antisymmetrisk.

Den stressenergiteusor som används mest är

$$T_{\text{sym}}^{\mu\rho} = -F^{\mu\nu} F^\rho_\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Den är bevarad i båda indexen enligt

$$\partial_\mu T_{\text{sym}}^{\mu\rho} = \partial_\rho T_{\text{sym}}^{\mu\rho} = 0$$

eftersom

$$\int \frac{\partial}{\partial t} T^{0\rho} d^3\mathbf{x} = - \int \frac{\partial}{\partial x^i} T^{i\rho} d^3\mathbf{x}. \quad (8.39)$$

Elementen i stressenergiteusorn tolkas som att $T^{0\rho}$ är tätheten av 4-rörelsemängden p^ρ för det elektromagnetiska fältet. Med den här tolkningen blir innebörden av Ekvation (8.39) att 4-rörelsemängden är bevarad om $T^{i\rho} \rightarrow 0$ när $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, det vill säga om energi inte flödar in eller ut.

Sist kan vi notera att elementet T^{00} kan skrivas som

$$T^{00} = \frac{1}{2} (\mathbb{E}^2 + \mathbb{B}^2),$$

vilket är energitätheten i det elektromagnetiska fältet och att

$$T^{0i} = (\mathbb{E} \times \mathbb{B})^i$$

är *Poyntings vektor*.

8.9 Effektförlust för en accelererande, laddad partikel

Enligt klassisk elektromagnetism utstrålar en accelererande laddad partikel en effekt, vilken kan bestämmas enligt *Larmors formel*³

$$P = \frac{1}{6\pi} q^2 a^2. \quad (8.40)$$

³Faktorn $\frac{1}{6\pi}$ är ovanlig i litteraturen och förekommer här för att vi använder Lorentz-Heaviside-enheter och inte CGS-enheter.

Här är P den utstrålade effekten, q är laddningen hos partikeln och a är dess acceleration. Den Lorentzinvarianta generaliseringen till denna ekvation är

$$P = \frac{1}{6\pi} q^2 (-A^\mu A_\mu) = \frac{1}{6\pi} q^2 \alpha^2,$$

där A^μ är 4-accelerationen och α är egenaccelerationen, definierad enligt Ekvation (6.22). Detta kan uttryckas i termer av hastigheten $\mathbf{u}$ och accelerationen $\mathbf{a}$ enligt Ekvation (6.20) och (6.21) på följande vis.

$$P = \frac{1}{6\pi} q^2 \gamma^4 [a^2 + \gamma^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2] = \frac{1}{6\pi} q^2 \gamma^6 [a^2 - (\mathbf{u} \times \mathbf{a})^2]$$

För att kolla att denna ekvation reduceras till Ekvation (8.40) låter vi $u \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow 1$).

$$P = \frac{1}{6\pi} q^2 \gamma^4 [a^2 + \gamma^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2] = \frac{1}{6\pi} q^2 \gamma^6 [a^2 - (\mathbf{u} \times \mathbf{a})^2] \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{1}{6\pi} q^2 a^2$$

8.10 Övningsuppgifter

8.1 Med $F_{\mu\nu}$ enligt Ekvation (8.5), visa att $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2(\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} - \mathbb{B} \cdot \mathbb{B})$.

8.2 Visa att Lorentzekvationen

$$\frac{d}{dt}(\gamma(v)m\mathbf{v}) = q(\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B})$$

också kan skrivas som

$$\gamma(v) \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = q(\mathbb{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B} - (\mathbb{E} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}).$$

8.3 En partikel med laddning q och massa m rör sig med hastighet v i en cirkulär bana i ett konstant magnetiskt fält B som är ortogonalt mot planet som partikeln rör sig i.

(a) Visa att partikelns omloppstid ges av

$$T = \frac{2\pi m \gamma}{qB}.$$

(b) Visa också att rörelsemängden för en partikel med laddning $q \equiv e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, som rör sig i en cirkel med radie R enligt ovan ges av $p \approx 300BR$ där p är i MeV/c, B är i Tesla och R är i meter.

8.4 En partikel med laddning q rör sig i en cirkulär bana med centrum i origo, radie R och konstant hastighet v . Bestäm den elektromagnetiska potentialen A^μ i origo vid tiden t .

8.5 Uttryck $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ i termer av $\mathbb{E}$ och $\mathbb{B}$. Här är $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ den fullständigt antisymmetriska tensorn, som uppfyller $\epsilon^{0123} = 1$ och byter tecken vid platsbyte av två index.

8.6 Visa att Lorentzprodukten av 4-strömtätheten i Ekvation (8.7) är en 4-vektor.

8.7 En K-meson K^0 sönderfaller i vila i en bubbelkammare till två pioner: $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$. Pionerna har massa $140 \text{ MeV}/c^2$ och rör sig i ett ortogonalt magnetiskt fält $B = 2 \text{ T}$. Pionerna lämnar två cirkulära spår, båda med radie $R = 0,344 \text{ m}$. Bestäm massan för K^0 .

8.8 Låt $F_{\alpha\beta}$ vara den elektromagnetiska fälttensorn i Maxwellteori. Visa att Maxwellekvationen

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$$

kan skrivas på ett ekvivalent sätt som

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0,$$

där $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ är den fullständigt antisymmetriska tensorn.

8.9 Lösning av Maxwells ekvationer:

- (a) Skriv Maxwells fria ekvationer $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ i termer av potentialen A_μ .
- (b) Visa att $A_\mu = \epsilon_\mu \exp(ik_\nu x^\nu)$ uppfyller Maxwells ekvationer om $\epsilon_\mu k^\mu = k_\mu k^\mu = 0$. Notera att $k_\mu k^\mu = 0$ betyder att A_μ beskriver en masslös partikel (foton), när man kvantiserar den.
- (c) Visa att $F_{\mu\nu}$ är invariant om vi ersätter ϵ_μ med $\epsilon_\mu + \alpha k_\mu$, där α är en konstant. Detta kallas Gaugeinvarians.

8.10 Betrakta ett inertialsystem med koordinater (t, x, y, z) . Från uttrycket för Lienard-Wiechert-potentialen härled uttrycket för Coulomb-potentialen V vid origo, då en partikel med laddning q rör sig enligt $x = u_0 t$, $y = y_0$, $z = 0$. Hastigheten u_0 i x -led och positionen y_0 i y -led är konstanter.

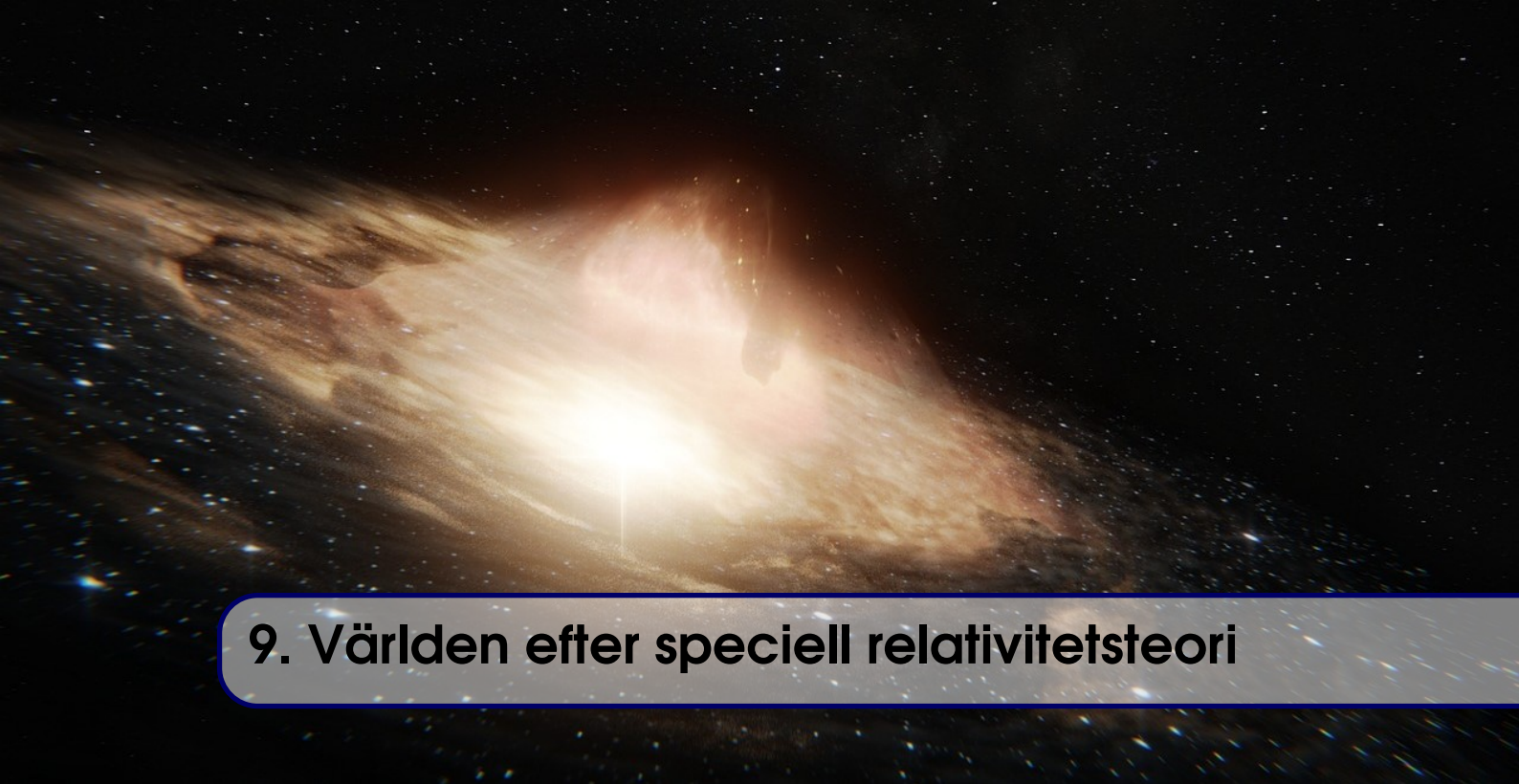
8.11 Visa att följande gäller för den elektromagnetiska fälttensorn $F_{\mu\nu}$ (antisymmetrisk) och stressenergitensorn $T_{\mu\nu}$ (symmetrisk).

- (a) $T_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$.
- (b) $F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F_\rho{}^\mu = 0$.
- (c) $T_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\mu} = 0$.

8.12 Visa att Lienard-Wiechert-potentialen kan skrivas på ett enklare och manifest Lorentzinvariant sätt som

$$A^\mu = \frac{q}{4\pi} \frac{U^\mu}{U^\nu R_\nu},$$

där U^μ är partikelns 4-hastigheten och $R^\mu = (t - \tilde{t}, \mathbf{x} - \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{t}}))$, som måste uppfylla $R_\mu R^\mu = 0$.



9. Världen efter speciell relativitetsteori

Speciell relativitetsteori är mer än hundra år gammal, men fysikaliska teorier som bygger på speciell relativitetsteori har fortsatt att utvecklas långt efter det. I detta kapitel ges en snabb presentation av vad du kan förvänta dig vid vidare studier inom ämnet.

9.1 Kvantmekanik + speciell relativitetsteori = kvantfältteori

Under samma period som speciell relativitetsteori utvecklades, ägde en ännu mer radikal förändring i vår syn på världen rum. Inspirerad av studier av växelverkan mellan materia och strålning, skapades kvantmekanik av Einstein själv, Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger och många andra. Kvantmekanik beskriver fysikaliska processer i form av sannolikheter och ger en sannolikhetsfördelning för deras resultat. I sin ursprungsformulering handlade det om partiklar med relativt låga hastigheter, exempelvis rör sig elektronen i en väteatom med cirka 1 % av ljusets hastighet. Därför behövdes inte speciell relativitetsteori för att visa kvantmekanikens riktighet, men frågan hur man kombinerar de två teorierna uppstod omedelbart.

Det fanns några knepiga frågor som behövde redas ut innan man kunde nå ett svar. Det första hindret var det faktum att den relativistiska mass-skal-relationen, $E^2 = m^2 + p^2$, har två lösningar för energin, $E = \pm \sqrt{m^2 + p^2}$, i motsats till det klassiska uttrycket $E = p^2/2m$. Frågan var hur man skulle tolka de negativa energilösningarna som uppstod i det relativistiska fallet. Lösningen på detta pussel var den insikt som beskrev *antipartiklar* med positiv energi. Deras existens är nödvändig för att ihopslagningen av speciell relativitetsteori och kvantmekanik ska gå ihop.

Den relativistiska gränsen för en partikel motsvarar att gå mot högre energier, vi minns från Ekvation (7.9) att $\gamma = E/m$. Vi vet också att energi kan omvandlas till massa i form av nya partiklar. Detta betyder att en relativistisk teori inte kan begränsas till att beskriva system med ett konstant antal partiklar, vilket exempelvis är fallet i Schrödinger-ekvationen för en atom. Speciell relativitetsteori + kvantmekanik kräver att studera många, i princip oändligt många, kroppssystem.

Ett sista tekniskt hinder uppstod snart i föreningen av speciell relativitetsteori och kvantmekanik. Några av de integraler som beräknas för att beskriva vissa fenomen visade sig vara divergerande. Detta problem tog längre tid att lösa och blev fullt förstått först på 1970-talet, tack vare arbete av Kenneth G. Wilson, Nikolaj Bogolyubov, Murray Gell-Mann, Francis Low och flera andra. Teorin

går under namnet *renormering*.

Efter allt detta vet vi nu hur man kombinerar speciell relativitetsteori med kvantmekanik. Den resulterande formalismen är känd som *kvantfältteori* och det är språket där den aktuella teorin för *partikelfysik*, *Standardmodellen*, formuleras. Kvantfältteori använder fält, precis som den elektromagnetiska potentialen A_μ , som byggstenar. Fält som A_μ uppfyller Maxwells ekvationer, eller en viktig generalisering kallad *Yang-Mills ekvationer*, och beskriver partiklar med spinn ett. Man behöver också Klein-Gordon-ekvationen för att beskriva partiklar av spinn noll som Higgs bosonen och *Diracekvationen* för att beskriva partiklar av spinn en halv, som elektroner och kvarkar. Högre spinn är svårare att hantera och behövs inte i formuleringen av *standardmodellen*. Det finns dock åtminstone ett anmärkningsvärt undantag: *gravitation*.

9.2 Gravitation + speciell relativitetsteori = allmänna relativitetsteori

En huvudutveckling parallell mot allt ovanstående ägde rum i studien av gravitationskraften. Det stod omedelbart klart att Newtons gravitationslag $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ inte är relativistisk invariant. Till exempel växelverkar där två avlägsna partiklar med varandra omedelbart. Det var Einstein som nästan ensam lyckades kombinera gravitation med relativistiska principer, men det tog honom mer än tio år och krävde en drastisk utvidgning av teorin. För att inkludera gravitation var han tvungen att generalisera Minkowskimetrikens $\eta_{\mu\nu}$ till ett dynamiskt fält $g_{\mu\nu}$, beroende på tid och position. Det visade sig att rumtid är krökt och att Lorentzinvariants är giltig punkt för punkt och inte globalt. Man måste alltså göra olika Lorentztransformationer på olika punkter.

Den ovan formulerade teorin går under namnet *allmän relativitetsteori* och har testats experimentellt med stor framgång sedan dess. Den förutspår bland annat att planeterna inte cirkulerar runt solen i exakta elliptiska banor, att ljuset från avlägsna stjärnor böjs av solen och att tyngdkraften påverkar tidens flöde. Den möjliggör också en beskrivning av universums evolution och förutspår existensen av svarta hål och gravitationsvågor. Alla dessa förutsägelser har bekräftats av experiment med hög precision, så sent som 2017 fick forskarna bakom *LIGO* Nobelpriset i fysik för upptäckten av gravitationsvågor.

9.3 Framtiden

En kvantmekanisk beskrivning av allmän relativitetsteori har visat sig vara extremt utmanande och det är fortfarande ett öppet problem, trots att flera viktiga framsteg har gjorts inom *strängteori*. Hindren på vägen mot en fullständig lösning är dock många. Allmän relativitetsteori förutspår gravitationsvågor, precis som elektromagnetism förutspår ljusvågor, men kvantiseringen av ljus kräver emellertid att införa en foton (spinn ett) medan kvantiseringen av gravitationen kräver en graviton (spinn två). Detta är redan ett stort hinder i formuleringen av kvantteorin. Ett relaterat hinder uppstår när man vill reglera de divergerande integralerna som uppstår i vissa beräkningar. På grund av gravitationens märkliga natur är detta svårt att utföra på ett sätt som gör att resultaten kan extrapoleras till godtyckligt höga energier.

Alla dessa problem har lett till att de flesta fysiker tror att kvantfältsteorins språk inte räcker till för en kvantitetsbeskrivning av gravitationen. Detta innebär att det krävs en radikal ny formalism vars våglängder är minst lika korta som Plancklängden $\sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-35}$ m, den otroligt lilla skalan som kan erhållas genom att kombinera naturens grundläggande konstanter. På så små längder förväntas själva begreppet rumtid brytas ner. Sökningen fortsätter.

Ordlista

svenska	engelska
aberration (jfr. synvilla, anomalitet)	aberration
absolut rum	absolute space
allmän relativitetsteori	general relativity
“boost”	boost
dilatation / utvidning	dilation
drageffekten	drag effect
egenacceleration	proper acceleration
egenlängd	proper length
egentid	proper time
eter	ether / aether
inertialsystem	inertial frame
kausalitet	causality
kontraktion / förkortning	contraction
kontravariant	contravariant
kovariant	covariant
kvantfältteori	quantum field theory
kvantmekanik	quantum mechanics
kvasar	quasar
ljuskon	light cone
ljuslik	lightlike
ljussekund	light-second
luminositet	luminosity
längdkontraktion	length contraction
masscentrums inertialsystem	center of mass system / zero momentum frame
mass-skal-relationen	The mass-shell relation
momentant vilo(inertial)system	instantaneous rest frame
partikelsönderfall	particle decay
rapiditet	rapidity
relativistisk massa	relativistic mass
renormering	renormalization
rumslig	spacelike
rumtid	spacetime
samtidighet	simultaneity
speciell relativitetsteori	special relativity
standardkonfiguration	standard configuration
stressenergitensor	stress-energy tensor
strålkastareffekten	headlight effect
tidsdilatation	time dilation
tidslik	timelike
tröghet	inertia
tröskelenergi	threshold energy
vilomassa	rest/invariant mass
vågtoppar	wavecrests

Sakregister

Symbols

3-dimensionell notation	39
3-kraft	68
4-acceleration	47
4-dimensionell notation	39
4-hastighet	46
4-kraft	68
4-rörelsemängd	53
konservering	54
4-skalarprodukt	43
4-vågvektor	49
4-vektor	42

A

Aberration	33
av ljus	33
av partiklar	35
av vågor	35
Absolut rum	2
Accelerationsaddition	23
invers	23
Accelerationslagen, klassisk	1
Addition av acceleration	23
Addition av hastighet	21
Alfasönderfall	60
Allmän relativitetsteori	92
Antimateria	91
Antipartikel	91

B

Biljard	58
Bogolyubov, Nikolaj	91
Bohr, Niels	91

C

Compton, Arthur	64
Comptoneffekten	64
invers	70
Comptonvåglängden	70

D

Definition av tid och längd i ett inertialsystem	8
Diracekvationen	92

Dopplereffekten	31
för rörlig källa	31
för rörlig observatör	32
Dopplerfaktorn	34
Drageffekten	30
Dynamik	53

E

$E=mc^2$	55
Effektförlust för en accelererande, laddad partikel	88
Egenacceleration	25, 48
konstant	25
ortogonal rörelse	49
rätlinjig rörelse	49
Egentid	24
Einstein, Albert	1, 7, 55
Einsteins postulat	7
Einsteins summationskonvention	39
Elastisk kollision	56
Elektromagnetiska fälttensorn	72
Elektromagnetism	71
klassisk	3
Energi	55
partikel	55
Rörelseenergi	55
Viloenergi	55
Energi- och rörelsemängdsrelationer	55
Enheter $c=1$	41
Enhetsvektorer	39
Eter	3
vind	3
Euklidiskt 3D-rum	39

F

Fält	71
Skalärfält	71
Tensorfält	72
Vektorfält	71
Feynmans vägintegral	82
Fizeau, Hippolyte	29
Fizeaus experiment	29
Fizeaus formel	30
Funktional	80

G

Galileitransformationen	2
Gammafaktorn	11
Gammasönderfall	60
Gaugepotential	77
Gell-Mann, Murray	91
Gravitation	92
Greensfunktion	79
Guds sensoriska organ	2

H

Händelse i rumtid	42
Hastighetsaddition	21
invers	21
Headlight effect	34
Heisenberg, Werner	91
Hookes generaliserade lag	41
Hubble, Edwin	37
Hubbles lag	37

I

Inertialsystem	2
Interferometer	4
Intervall mellan två händelser	
3D	13
4D	42
Invers	
accelerationsaddition	23
Comptoneffekt	70
hastighetsaddition	21
Lorentztransformation	11

K

Kartesiska koordinater	2
Kinematik	21
Klein-Gordon-ekvationen	69, 92
Kontinuitetsekvationen	74
Kontravariant	39
Kovariant	39
Kovariant formalism	71
Kraft	68
massbevarande	68
Kroneckers delta	40
Kvantfältteori	92
Kvantmekanik	91
Kvasar	37

L

Längdkontraktion	15
Lagen om verkan och motverkan	1
Lagrangefunktionen	81
Lagrangetäthet	83
Larmors formel	88
Lienard-Wiechert	79
LIGO	92
Ljusklocka	27
Ljuskon	45
Ljuslik vektor	45
Ljussekund	41
Lorentz, Hendrik Antoon	5
Lorentz-“boost”	42
Lorentz-Heaviside-enheter	3
Lorentzfaktorn	11
Lorentzinvariants	13
vid problemlösning	50
Lorentzkraft	72
Lorentzkvadrat	44
Lorentzprodukt	43
Lorentztransformation	
i 3D	11
i 4D	42
invers	11
Lorentztransformationen	10
Lorenz gauge	78
Lorenzvillkoret	78
Low, Francis	91
Luminositet	35

M

Mandelstam, Stanley	63
Mandelstamvariabler	63
Manifest Lorentzinvariant tensorform	71
Mass-skäl-relationen	56
Massa	53
relativistisk	54
Massbevarande kraft	68
Masscentrums inertialsystem	57
Maxwell, James Clerk	3
Maxwells ekvationer	
klassiskt	3
manifest Lorentzinvariant form	75
Mekanik, klassisk	1
Michelson, Albert A.	4
Michelson-Morleys experiment	3
Minkowski 4D-rumtid	41

Minkowskidiagram	12
Minkowskimetriken, η	43
Minsta verkans princip	80
Modern fysik	7
Momentant viloinertialsystem	24
Momentant vilosystem	24
Morley, Edward	4

N

Newton, Isaac	1
Newtons lagar	1
Newtonska relativiteten	3
Noll rörelsemängds-systemet	57

O

Optik	29
Ortsvektor	39

P

Partikelfysik	92
Partikelsönderfall	60
Power dissipation	88
Poyntings vektor	88
Pseudo-paradox	
staven och garaget	16
tvillingparadoxen	19

R

Raketekvationen	66
klassisk	66
relativistisk	66
Rapiditet	22
Relativ tid	8
Relativistisk "biljard"	58
Relativistisk massa	54
Rumslik vektor	45
Rumsseparerad	45
Rumtid	41
diagram	12

S

Sönderfall	
alfa	60
gamma	60
Samtidighet	8

Schrödinger, Erwin	91
Skalär, 3D	39
Skalär, 4D	41
Skalärfält	71
Standardkonfiguration	2
Standardmodellen	92
Staven och garaget	16
Strängteori	92
Strålkastareffekten	34
Strålning från en rörlig laddning	79
Stressenergitensorn	84
Summationskonvention	39

T

Tensor	
i 3D, L	40
i 4D, Λ	42
Tensorfält	72
Tidsdilatation	18
Tidslik vektor	45
Tidsseparerad	45
Tröghetslagen	1
Tröskelenergi	61
Tsiolkovskys raketekvation	66
Tvillingparadoxen	19

V

Vågvektor	49
Variationskalkyl	81
Vektorfält	71
Verkan	80
Viloinertialsystem	24
Vilomassa	54
Vilosystem	24
von Laue, Max	31

W

Wilson, Kenneth G.	91
-------------------------	----

Y

Yang-Mills ekvationer	92
-----------------------------	----

Z

Zur Elektrodynamik bewegter Körper	7
--	---