

# Föreläsning V

1

Def. [Stor O-ordo] Låt  $f, g: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Vi säger att  $f = O(g)$  om  $\exists 0 < \delta < a$  och  $M < +\infty$  s.d.

$$|f(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall |x| < \delta.$$

Ex. [Föreläsning IV]  $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{x^3}{6} \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

(tag. tex  
 $M = 1/6$ )

[Övning:] Räkeregler för  $O$ :  $\forall r, s \geq 0$  heltal:

i)  $x^r O(x^s) = O(x^{r+s})$  och  $\pm O(x^r) = O(x^r)$

ii)  $x^r + O(x^s) = O(x^s)$  om  $r \geq s$ .

iii)  $O(x^r)O(x^s) = O(x^{r+s})$  och  $O(x^r) + O(x^s) = O(x^{\min(r,s)})$

Ex. 1 Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

Met: 1)  $(\cos x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos x} = e^{\frac{1}{x^2} \ln(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3))}$

2)  $\ln(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)) = (-\frac{x^2}{2} + O(x^3)) + O((- \frac{x^2}{2} + O(x^3))^2)$   
 $= 1 + (-\frac{x^2}{2} + O(x^3))$   
 $= x^4 + O(x^5)$   
 $= O(x^4)$

$\ln(1+y) = y + O(y^2)$   
 $= -\frac{x^2}{2} + O(x^3)$

$\Rightarrow (\cos x)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}(-\frac{x^2}{2} + O(x^3))} = e^{-\frac{1}{2} + O(x)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}, \text{ då } x \rightarrow 0.$

Ex. 2 Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$  [Föreläsning III]

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)$  [Föreläsning IV]

$\frac{1+5}{60} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow \sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$   
 $- \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))^3 + \frac{1}{120}(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))^5 + O(x^7)$   
 $= x - \frac{x^3}{3} + (-\frac{1}{6} \cdot 3x^2(-\frac{x^3}{6}) + \frac{1}{120} \cdot 5x^5) + O(x^7) = x - \frac{x^3}{3} + (\frac{1}{60} + \frac{1}{12})x^5$

$$\leadsto \sin(\sin x) - \arctan x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + O(x^7)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7)\right) \\ = -\frac{x^5}{10} + O(x^7)$$

$$\leadsto \frac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5} \rightarrow -\frac{1}{10}$$

Sats (l'Hospitals regel) Antag att  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  är

kontinuerligt deriverbara, och  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ .

Antag att i)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ .

ii)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$ .

Då gäller:  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ .

Ex. Beräkna  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$   
 $e^{\frac{1}{x-1} \ln x}$

$a = 1, b = 2$  (t.ex.)

$f(x) = \ln x, g(x) = x - 1$

$f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 1$

i) uppfyllt!

ii) uppfyllt! [ $c = 1$ ]

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}} = e.$$

Beweis av l'Hospital: Sätt  $f(a) = g(a) = 0 \leadsto f, g$  kontinuerliga i  $a$ .

Tåg  $a < x < b$ ; tillämpa medelvärdesatsen (MH. version - föreläsning III)

$$\exists a < \xi_x < x : \underbrace{(f(x) - f(a))}_{=0} \underbrace{g'(\xi_x)}_{\neq 0} = \underbrace{(g(x) - g(a))}_{=0} f'(\xi_x)$$

enl. antagande

$$\leadsto \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Då  $x \rightarrow a^+ \leadsto \xi_x \rightarrow a^+$ .

$$\text{Eftersom } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = c \text{ (enl. ii)}$$

Följer att  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ .



Ex. Visa att  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \frac{a}{b} \quad \forall a, b > 0$

$$f(x) = \ln \cos ax, \quad f(0) = 0$$

$$g(x) = \ln \cos bx, \quad g(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-a \sin ax}{\cos ax}$$

$$g'(x) = \frac{-b \sin bx}{\cos bx}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{\cos bx}{\cos ax} = \frac{a}{b}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$   
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$

$\frac{\sin ax}{ax} \rightarrow 1$   
 $\frac{\sin bx}{bx} \rightarrow 1$

$\frac{a}{b}$