

# Föreläsning VII

(1)

•  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$

•  $f: I \rightarrow I$  kontinuerlig.

Obs: Def.  $f' = f \circ f \circ \dots \circ f$   
 $x_n = f^n(x_0)$ ,  $n \geq 0$ .

Betrakta  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n \geq 0$ . Vad kan vi säga om talföljden  $(x_n)$ .

• Lemma: Antag att gränsvärdet  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existerar. Då gäller  $f(y) = y$ .

Beweis:  $f$  kontinuerlig  $\rightarrow f(y) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = y$ .  $\square$

• Lemma: Antag att  $\exists c < 1$  s.a.  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad \forall x, y \in I$ .

Då gäller i)  $\exists! y \in I$  s.a.  $f(y) = y$ .

ii)  $\forall x_0 \in I$  så gäller  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Beweis: (i) Om  $f(y_1) = y_1$  och  $f(y_2) = y_2$  så gäller

$$|y_1 - y_2| = |f(y_1) - f(y_2)| \leq c|y_1 - y_2|; \text{ då } c < 1 \Rightarrow |y_1 - y_2| = 0$$

$\Rightarrow$  Det existerar högst en lösning till  $f(y) = y$ .

Då  $f(I) \subset I$  gäller  $a \leq f(a)$  och  $f(b) \leq b$ .

$\hookrightarrow$  Om  $g(x) = x - f(x)$ , så gäller  $g(a) \leq 0$  och  $g(b) \geq 0$ .

$\hookrightarrow$  [Mellanliggande värden]  $\exists y \in [a, b]$  s.a.  $g(y) = f(y) - y = 0$ ,

Obs  $g$  kontinuerlig.

d.v.s.  $f(y) = y$ .

$$(ii) \quad |x_n - y| = |f(x_{n-1}) - f(y)| \leq c|x_{n-1} - y| = c|f(x_{n-2}) - f(y)| \\ \leq c^2|x_{n-2} - y| \leq \dots \leq c^n|x_0 - y|, \quad \forall n \geq 1. \\ \rightarrow 0 \text{ då } c < 1. \quad \square$$

Exempel 13-12-18 5) Avgör om talföljden  $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}$ ,  $x_0 = 2$

är konvergent, och bestäm gränsvärdet.

I detta fall:  $f(x) = \frac{3}{2+x}$  - Obs.  $f(x) = x \Leftrightarrow 3 = x(2+x) \Leftrightarrow x = 1$  eller  $x = -3$

Tag  $I = [0, 3]$  (l.ex.):

Behöver visa i)  $f(I) \subset I$

ii)  $\exists c < 1$  s.a.  $|f(x) - f(y)| < c|x - y| \quad \forall x, y \in I$ .

i)  $f(0) = 3/2 \in I$ ,  $f(3) = 3/6 \in I$ ,  $f'(x) = -\frac{3}{(2+x)^2} \neq 0 \quad \forall x \in I$  (2)

ii)  $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{3}{2+x} - \frac{3}{2+y} \right| = 3 \left| \frac{(2+y) - (2+x)}{(2+x)(2+y)} \right| \leadsto f(I) = [3/6, 3/2] \in I.$

$$= \frac{3|x-y|}{\underbrace{(2+x)}_{\geq 2} \underbrace{(2+y)}_{\geq 2}} \leq \frac{3}{4}|x-y| \quad \forall x, y \in I.$$

$\leadsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$  unik fixpunkt ( $f(x) = x$ ) i  $I$ .

•  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$

•  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  kontinuerligt deriverbar

•  $\exists 0 < k_0 < k_1$  så att  $k_0 \leq |g'(x)| \leq k_1 \quad \forall x \in I$ .

•  $f(I) \subseteq I$ , där  $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ , för  $x \in I$ .

Lemma [Newton-Raphson] Om  $g(y) = 0$  för ngt.  $y \in I$ , och  $x_0 \in I$ ,

så gäller det att:  $|x_n - y| \leq \frac{k_1}{k_0} |x_{n+1} - x_n| \quad \forall n \geq 0$ , (\*)

där  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Beweis: Medelvärdesatsen:  $\forall n \geq 0 \exists \xi_n \in (y, x_n)$  s.a.

$$\frac{g(x_n) - g(y)}{x_n - y} = \frac{g'(\xi_n)}{1} (x_n - y) \leadsto |x_n - y| \geq \frac{1}{k_0} |g(x_n)|$$

$= f(x_n) \quad k_0 \leq |g'| \leq k_1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \leadsto |x_{n+1} - x_n| = \frac{|g(x_n)|}{|g'(x_n)|} \geq \frac{1}{k_1} |g(x_n)|$$

$= f(x_n)$

$\leadsto |x_n - y| \leq \frac{k_1}{k_0} |x_{n+1} - x_n| \quad \forall n$

Ex. Beräkna  $\sqrt{2}$  med 3 decimalers noggrannhet.

Tåg:  $g(x) = x^2 - 2$  - vet  $y = \sqrt{2} \in [1, 2] := I$ .

$g'(x) = 2x \leadsto k_0 = 2 \quad k_1 = 4.$

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{(x^2 - 2)}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

$f(1) = 3/2 \in I \quad f(2) = 3/2 \in I$

$f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - (x^2 + 2) \cdot 2}{4x^2} = \frac{2(x^2 - 2)}{4x^2}$

$\leadsto x = \sqrt{2}$  extrempunkt,  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \in I$

$\leadsto f(I) \subseteq I.$

$$x_0 = 3/2 \leadsto$$

$$x_1 = \phi(x_0) = \phi\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$$

$$x_2 = \phi(x_1) = \phi\left(\frac{17}{4}\right) = \left(\frac{17}{4}\right)^2 + 2 = \frac{289}{16} + 2 = \frac{289 + 32}{16} = \frac{321}{16}$$

$$x_3 = \phi(x_2) = \phi\left(\frac{321}{16}\right) = \left(\frac{321}{16}\right)^2 + 2 = \frac{103161}{256} + 2 = \frac{103161 + 512}{256} = \frac{103673}{256}$$

(3)

$$\leadsto |x_3 - x_2| < 6 \cdot 10^{-5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (*) \\ \end{array} \right. \leadsto |\sqrt{2} - x_2| \leq \left(\frac{4}{2}\right) \cdot |x_3 - x_2| < 12 \cdot 10^{-5} < 2 \cdot 10^{-4} \leadsto 3 \text{ decimales!} \\ \text{naggenauheit!}$$

$$\leadsto \sqrt{2} = \frac{321}{16} \quad (\text{app till 3 decimales})$$

$$\parallel$$

$$1,414213...$$