

Föreläsning VIII

1

$a_1, a_2, \dots$ talföljd, sätt $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \geq 1$.

Def:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (\text{om gränsvärdet existerar})$$

i vilket fall serier
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ så konvergera.

• Lemma 1: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bevis: Låt $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$;

$$a_n = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k}_{= s_n} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}_{= s_{n-1}} = s_n - s_{n-1} \rightarrow 0, \text{ då } n \rightarrow \infty. \quad \times$$

• Viktigt: Omvändningen gäller ej: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar.

Ex. $a_k = \frac{1}{k} \not\rightarrow 0$, men $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (ej konvergent!)

Bevis: $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \quad \forall n \geq 1.$

$\rightarrow \infty$, då $n \rightarrow \infty$. $\times$

Mer allmänt: $a_k = \frac{1}{k^p}$, $p > 0$, $p \neq 1$.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \rightarrow \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^p} \\ &\leq \frac{1}{k^p} \\ &= \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^{n+1} \\ &= \frac{1}{1-p} \left((n+1)^{1-p} - 1 \right) \\ &\rightarrow \infty \text{ om } p < 1. \\ &\text{Serien konvergerar ej!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} \\ &= 1 + \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^n \\ &= 1 + \frac{1}{1-p} (n^{1-p} - 1) \\ &\leq 1 + \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

Lemma 2: Om $a_k \geq 0 \quad \forall k$, så konvergerar serien

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ om och endast om (s_n) är begränsad.

för alla n
om $p > 1$.

Vad händer här?

Bevis: $(\Rightarrow)$ Om $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existerar så är (s_n) begränsad.

$(\Leftarrow)$ Om (s_n) begränsad; låt $s := \sup_{n \geq 1} s_n$.

$a_k \geq 0 \quad \forall k \Rightarrow s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$ vi påstår $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon}$ s.a.

$s - \varepsilon \leq s_n \leq s$ $\forall n \geq N_{\varepsilon}$

$\Rightarrow |s - s_n| < \varepsilon$

$\forall n \geq N_{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

Vad har vi visat?

2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \begin{cases} \text{konvergerar} & \forall p > 1 \\ \text{konvergerar ej} & \forall p \leq 1 \end{cases}$$

*

Integralkriteriet:

$f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monotont uttagandes (d.v.s. $\forall s \geq t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$)
(f begränsad)

$$a_k = f(k), \quad k \geq 1.$$

Obs: $a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) = a_k, \quad \forall k \geq 1.$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{k+1} &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n a_k = \leq 1 \quad (*) \\ &= a_{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Integralkriteriet

Vi har visat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergerar} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < +\infty.$$

Ex. $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x+2))^p}, \quad p > 1$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x+2))^p} &= \int_1^2 + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x+2))^p} \\ &\leq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_2^{\infty} \frac{1}{u^p} du < +\infty \end{aligned}$$

$p > 1.$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log(k+2))^p} \text{ konvergerar}$$

Lemma $\Delta_n := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$

i) begränsad underifrån.

ii) monotont uttagandes.

($\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$ konvergerar)

Beweis: i) $\Delta_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx$

ii) $\Delta_n - \Delta_{n+1} = -f(n+1) + \int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0 \quad \forall n$

XX

Korollarium [Euler 1734] Det existerar en konstant γ s.a.

(3)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \rightarrow \gamma, \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Beweis: $f(x) = \frac{1}{x}$, $\int_1^n f(x) dx = \ln n$

$$\Delta_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x} dx}_{\ln n} \rightarrow \gamma$$

[$\gamma \approx 0,57721566 \dots$] kallas ofta för Euler-Mascheroni konstant

*

• Geometrisk serie: $a_k = x^k$, $k \geq 1$

$$s_n = \sum_{k=1}^n x^k = x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right) \text{ om } x \neq 1$$

$$(\equiv 1 \text{ om } x = 1)$$

• $|x| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = +\infty$ (konvergerar ej)

• $|x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-x}$ (konvergerar)

• $x = 1 \Rightarrow s_n = n$ (konvergerar ej)

• $x = -1 \Rightarrow s_n = \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ jämn} \\ 1 & n \text{ udda} \end{cases} \rightarrow \text{konvergerar ej!}$

$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ konvergerar $\Leftrightarrow |x| < 1$
 $= \frac{1}{1-x}$