Föreläsning IX

Repetition:

- $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monotont avtagande.

$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, $n \geqslant 1$.

Då gäller:

$$\boxed{s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n \quad \forall n \geqslant 1.} \qquad (*)$$

* I synnerhet [Integralkriteriet]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) := \lim_{n \to \infty} s_n \text{ existerar}$$

$$\iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{T \to \infty} \int_1^{T} f(x)\,dx \text{ existerar.}$$

(Kor. (Föreläsning VIII)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}} = \begin{cases} \text{konv. om } \beta > 1 \\ +\infty \text{ om } \beta \leq 1 \end{cases}$$
)

— * —

Ex. Definiera $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+t}}$, $t > 0$. Visa att $\lim_{t \to 0^+} t\varphi(t) = 1$.

Sätt $f_t(x) = \frac{1}{x^{1+t}}$, $x \geqslant 1$ (monotont avtagande)

$s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_t(k)$, $\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} s_n(t) \quad \forall t > 0$.

$$(*) \qquad s_{n+1}(t) - 1 \leq \underbrace{\int_1^{n+1} f_t(x)\,dx} \leq s_n(t)$$

$$= \left[-\frac{1}{t} x^{-t}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{t}\left(1 - (n+1)^{-t}\right)$$

$$\leadsto \bullet \; t\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} t s_{n+1}(t) \leq \lim_{t \to \infty} \underbrace{t\underbrace{\left(\frac{1}{t}\left(1 - (n+1)^{-t}\right) + 1\right)}_{1 - (n+1)^{-t} + t}}$$

$$= 1 + t \to 1, \text{ då } t \to 0^+.$$

$$\bullet \; t\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} t s_n(t) \geqslant \lim_{n \to \infty} t \frac{1}{t}\left(1 - (n+1)^{-t}\right) = 1.$$

$$\leadsto \quad 1 \leq \lim_{t \to 0^+} t\varphi(t) \leq 1 \quad \leadsto \quad \lim_{t \to 0^+} t\varphi(t) = 1.$$

Teleskoperande summor:

- $b_0, b_1, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

$a_k = b_k - b_{k-1}$, $k \geq 1$. $\leadsto$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1})$

$$= (\cancel{b_1} - b_0) + (b_2 - \cancel{b_1}) + \ldots + (b_n - \cancel{b_{n-1}})$$

$$= b_n - b_0 \to -b_0, \text{ då } n \to \infty.$$

$$\leadsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = -b_0.$$

— * —

Ex. Beräkna $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Obs: $\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln \underbrace{(k^2-1)}_{(k-1)(k+1)} - \ln k^2$

$= \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln k$

$= \left(\ln(k+1) - \ln k\right) - \left(\ln k - \ln(k-1)\right) \quad \forall k \geq 2.$

$\leadsto a_k := \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \underbrace{\left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right)}_{=: b_k} - \underbrace{\left(\ln(k+1) - \ln k\right)}_{=: b_{k-1}}, \quad k \geq 1.$

$\leadsto \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -b_0 = \underline{\underline{-\ln 2}}.$ ($b_0 = \ln 2$)

— * —

- **Trivial obs:** Antag att $a_1, a_2, \ldots$ och $b_1, b_2, \ldots$ är två talföljder.

Om
- $a_k \geq 0$, $\forall k \geq 1$
- $\exists C > 0$, $M \geq 1$ s.a. $a_k \leq C b_k$ $\forall k \geq M$
- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar.

Bevis: Eftersom $a_k \geq 0$ $\forall k$ så räcker det att visa att $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ är begränsad

$\leadsto \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{M} a_k + \underbrace{\sum_{k=M+1}^{n} a_k}$

$\leq C \underbrace{\sum_{k=M+1}^{n} b_k}_{\text{begränsad}}$ ⨳

Ex. Konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\ln k)^2}$?

Obs. $u^2 \geq 2u \quad \forall u \geq 2. \rightsquigarrow (\ln k)^2 \geq 2 \ln k \quad \forall k \geq 4.$

$a_k = e^{-(\ln k)^2}, \quad b_k = e^{-2\ln k} = \frac{1}{k^2} \rightsquigarrow a_k \leq \underbrace{\ }_{C=1} b_k \quad \forall k \geq 4 = M$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar (Föreläsning VIII).

[Trivial obs]

$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar. (Svar = Ja).