

Föreläsning XI

1

Vi har sett att $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1 \quad \exists \theta = \theta(x, n) \in (0, 1)$

så att

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}_{\text{Taylorpol. av grad } n} + \underbrace{\frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{Restterm}}$$

Vad händer då $n \rightarrow \infty$?

• Obs. $\left| \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{|x| \cdot |x|^n}{(n+1)!} \rightarrow 0$, då $n \rightarrow \infty$
↑ för alla x

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Taylorserien associerad till funken $x \mapsto e^x$.

• Mer allmänt: Antag att (a_k) är en reell talföljd,
och definiera polynomen: $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

Frågor:

1) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konverger $\phi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x)$?

2) Om $\phi(x)$ konvergerar, gäller t.ex. att

$$\phi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (\text{förutsatt att serien konv.})$$

3) $\phi_n(x)$ är också definierad för komplexa x :

– Vad gäller för $\phi(x)$ för komplexa x ?

Diskussion av 1)

Rotkriteriet: • Om $\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| < 1$ för alla tillräckligt stora k
så konvergerar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (absolut).

• Om $\sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| > 1$ för alla tillräckligt stora k så

div konvergerar $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Beweis • Antag att $\exists k_0$ s.a. $\sqrt[k]{|a_k| \cdot |x|} \leq q < 1 \quad \forall k \geq k_0$.

$\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |x|^k = \sum_{k=0}^{k_0} |a_k| \cdot |x|^k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{|a_k| \cdot |x|^k}{\leq q^k}}_{\leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} < +\infty}$

$\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konverger absolut.

• Antag att $\exists k_0$ s.a. $\sqrt[k]{|a_k| \cdot |x|} \geq q > 1 \quad \forall k \geq k_0$

Då: $|a_k| \cdot |x|^k \geq q^k \rightarrow \infty$

$\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar ej, då termerna inte går mot noll, då $n \rightarrow \infty$.



*

Ex. $a_k = \frac{2^k \cdot (-1)^k}{k}$ — för vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$?

($k \geq 1$)

$|a_k|^{1/k} |x| = \frac{2}{\sqrt[k]{k}} |x| \leadsto \forall |x| < 1/2 \quad \exists k_x \quad \forall k \geq k_x \quad |a_k|^{1/k} |x| < 1$

$\sqrt[k]{k} = e^{\frac{1}{k} \ln k} \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$

$\leadsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar (absolut) om $|x| < 1/2$.

• $\forall |x| > 1/2 \quad \exists k_x \quad \forall k \geq k_x \quad |a_k|^{1/k} |x| > 1$

$\leadsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ divergerar om $|x| > 1/2$

Överstår att analysera:

• $x = 1/2: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

konvergerar enl. Leibniz kriterium!

• $x = -1/2: \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

dividerar enl. integralkriteriet t.ex.

$\leadsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar för $-1/2 < x \leq 1/2$

endast betingad konvergens då $x = 1/2$!

Konvergenzradie

3

Givet en reell talföljd $a_0, a_1, a_2, \dots$, definiera

$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}_{\text{potensserie}} \text{ konvergerar absolut}\}$$

Sats Det finns exakt 3 möjligheter:

i) $C = \{0\}$

ii) $C = \mathbb{R}$ (d.v.s. konvergerar absolut)

iii) $\exists R > 0$ s.d. $C = (-R, R)$

R kallas för potensseriens konvergenzradie.

Beweis: Eftersom $0 \in C$ så är C icke-tom.

• Fall 1: C obegränsad. $\leadsto \forall x \in \mathbb{R} \exists x_0 \in C$

s.d. $|x_0| > |x|$.

Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^{k-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|a_k| \cdot |x_0|^{k-1}}_{= |a_k x_0|^{k-1}} < +\infty$ (då $x_0 \in C$)

så konvergerar även $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut.

$\leadsto \boxed{C = \mathbb{R}}$

• Fall 2: $R := \sup\{|x| \mid x \in C\} < +\infty$ (d.v.s. C begränsad)

• Om $R = 0$, så måste $\boxed{C = \{0\}}$.

– Om $R > 0$: tag $x \in (-R, R)$ – då existerar $x_0 \in C$ med $|x| \leq |x_0| < R$

$\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^{k-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |x_0|^{k-1} < +\infty$, då $x_0 \in C$

$\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar absolut, $\leadsto x \in C$.

Då x är godtyckligt, så gäller $\boxed{C = (-R, R)}$

