

Föreläsning XII

1

Konvergens av kplx talföljder: $z_k = x_k + iy_k \rightarrow z = x + iy \rightarrow x_k, y_k, x, y \in \mathbb{R}$

Vi säger att $z_k \rightarrow z$ om $\begin{cases} x_k \rightarrow x \\ y_k \rightarrow y \end{cases}$.

$c_0, c_1, \dots$ kplx talföljd $\rightarrow s_n = \sum_{k=0}^n c_k$.

Vi definierar $s = \sum_{k=0}^{\infty} c_k := \lim_n s_n$ existerar.

Vi säger då att $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergerar.

Kom ihåg: Om $c_k = a_k + ib_k$
 $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, så $|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

Vi säger att $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergerar absolut om $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < +\infty$

Lemma: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv. abs $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv.

Bewe: $c_k = a_k + ib_k \leadsto |a_k| \leq |c_k|$ och $|b_k| \leq |c_k|$

Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < +\infty \leadsto \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$ och $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < +\infty$.

$\leadsto x := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ och $y := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergerar.

$\leadsto s_n = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) + i \cdot \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \rightarrow x + iy \leadsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konv. X

Antag att $c_0, c_1, c_2, \dots$ kplx. talföljd.

kallas
konvergensradie

• Sats (Föreläsning XI) $\exists R \in [0, \infty]$ s.a. $\forall x \in (-R, R)$

$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergerar absolut, (och divergerar $\forall |x| > R$)

($R=0$ - bara för $x=0$, $R=+\infty$ - för alla $x \in \mathbb{R}$)

• Rotkriteriet: $f(x)$ konvergerar absolut om $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x| < 1$

för alla tillräckligt stora k .

• $f(x)$ divergerar om $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x| > 1$ för alla tillräckligt stora k .

Sats (Bevis nästa vecka) Antag att konvergensradie $R > 0$.

2

för $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Då gäller: $\forall |x| < R$

i) $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^{k-1}$

ii) $\int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$

d.v.s. derivering/integrering kan göras termvis.

Ex. $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_{\alpha}(x) = e^{\alpha x} \stackrel{\text{def!}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$ ($c_k = \frac{\alpha^k}{k!}$)

• Föl. $R = +\infty$

Rotkriterium: Tag $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x| = |\alpha| \cdot |x|$

$\sqrt[k]{k!} = \prod_{\ell=1}^k \sqrt[\ell]{e} = \left(\prod_{\ell=1}^T \sqrt[\ell]{e} \right) \cdot \left(\prod_{\ell=T+1}^k \sqrt[\ell]{e} \right) \geq T^{1/2}$
 Tag $T > 0 \geq 1$ $\geq \frac{1}{T^{(k-T)/k}} \geq T^{1/2}$

Då $T > 0$ godtyckligt, $\forall x \in \mathbb{R}$

för alla $T \leq 2K$.

$\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |x| < 1$, för tillr. stora k . $\times$

$\leadsto f'_{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot k \cdot x^{k-1}}{k!} = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha x^k}{k!} = \alpha \cdot f_{\alpha}(x)$

$\leadsto$ Regel: $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ gäller även för komplexa α !

(Tmf. föreläsning II).

Bessels ekv.

Besselfunktioner

Betrakta

$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$

$y(0) = 1$
 $y'(0) = 0$

Ansätt $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ (vi orar oss för konv.-radier senare)
 $c_0 = 1, c_1 = 0$

$\leadsto x y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k$ $x^2 y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^k$

$\leadsto$ Ex. 8 [ELW, 19.4]