

Repetition:

- $c_0, c_1, c_2, \dots$ kplx. talföljd.

Betrakta $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Antingen:

i) $\phi(x)$ konvergerar endast för $x=0$ (t.ex. om $c_k = e^{k^2}$)

eller

ii) $\exists R \in (0, \infty]$ s.a. $\phi(x)$ konvergerar (absolut) $\forall |x| < R$
divergerar $\forall |x| > R$

(Om $R = \infty$ så konvergerar $\phi(x) \forall x \in \mathbb{R}$)

Veckans mål:

Visa förra veckans svarta låda: Om ii) inträffar, så gäller

I) ϕ oändligt deriverbar på intervallet $(-R, R)$

och $\phi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \quad \forall x \in (-R, R)$.

II) $\int_0^x \phi(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} \quad \forall 0 \leq x < R$.
(liknande formel för $-R < x < 0$)

[Kort sagt: Innanför konvergensradier får man
derivera och integrera termvis.]

II) är det fundamentala resultatet:

• Lemma II) $\Rightarrow$ I)

Bevis:

Steg 1: Sätt $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$. Påst: g 's konvergensradie $\geq R$.

Steg 2: Använd II) på g : $\forall 0 \leq x < R$ gäller

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k c_k x^k}{k} = \phi(x) - c_0.$$

Integralkalkylens fundamentalsats: $g(x) = \phi'(x)$, vilket
skulle visas.

Beweis der Behauptung in Schritt 1:

Vill visa: $\forall |x| < R$ så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ absolut.

Vet: $\forall |x| < R$ så gäller $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot |x|^k < +\infty$.

• Tag $0 < |x| < |x_0| < R$:

Det existerar $k_0 \geq 1$ s.a. $k \leq \left| \frac{x_0}{x} \right|^k \quad \forall k > k_0$

$$\begin{aligned} \leadsto \sum_{k=1}^{\infty} k |c_k| \cdot |x|^k &= \underbrace{\sum_{k=1}^{k_0} k |c_k| \cdot |x|^k}_{< +\infty} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k |c_k| \cdot |x|^k \\ &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_k| \cdot \underbrace{\left| \frac{x_0}{x} \right|^k \cdot |x|^k}_{= |x_0|^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot |x_0|^k < +\infty \end{aligned}$$

eftersom $|x_0| < R$

$< +\infty$ X

Huvudfokus p.o.m. nu: När får vi integrera termvis?

Mer allmänt: Antag att $u_k: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, k \geq 0$,

är kontinuerliga f-kter sådana att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \text{ konvergerar } \forall x \in (a, b).$$

När gäller det att

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x u_k(t) dt ?$$

Alt. Formulering: Betrakta $f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), n \geq 0$.

Antag att $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in (a, b)$. När gäller det att

$$\int_a^x f(t) dt = \lim_n \int_a^x f_n(t) dt$$

för alla $a < x < b$?

Fråga: Antag att $f_n: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerliga fkt:er

sådana att $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in [c, d]$

När gäller det att:

$$\int_c^d f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d f_n(t) dt$$

?

Inte alltid sant: Antag att $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller

- $\varphi(0) = 0$, $\int_0^\infty \varphi(y) dy \neq 0$
- $\exists c > 0$ s.d. $|\varphi(x)| \leq \frac{c}{1+x^2} \quad \forall x \geq 0$

Tag t.ex.

$$\varphi(x) = x e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Betrakta $f_n(x) = n \varphi(nx)$, $x \in [0, 1]$.

$$- \int_0^1 f_n(x) dx = n \int_0^1 \varphi(nx) dx = \int_0^n \varphi(y) dy \rightarrow \int_0^\infty \varphi(y) dy \neq 0$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn}{1+n^2 x^2} = 0 \quad \forall x > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0 \quad (\text{då } \varphi(0) = 0)$$

$$\leadsto f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\leadsto 0 = \int_0^1 f(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

• Likformig konvergens:

Vi säger att $f_n: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergerar likformigt mot

$f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [c, d]} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Alternativ formulering: $\forall (x_n) \subset [c, d]$ gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f_n(x_n)| = 0$$

Obs. Konvergensen i förra exemplet är ej likformig.

4

Fix $x_0 \geq 0$, betrakta talföljden $x_n = x_0/n \in [0,1]$ för stora n .

$$f_n(x) = n f(x) \quad , \quad f(x) = 0 \quad \text{för } x \in [0,1]$$

Om $f_n \rightarrow f$ likformigt skulle det gälla att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{|f(x_0) - f_n(x_n)|}_{=0} = \lim_{n \rightarrow \infty} n |f(x_0)| = 0 \quad ,$$

$$\text{d.v.s. } f(x_0) = 0$$

Men $\int_0^1 f(t) dt \neq 0$, så det existerar minst ett $x_0 \geq 0$

så att $f(x_0) \neq 0 \leadsto$ Konvergens ej likformig.