

Sats 1) Antag att $f_n: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt mot $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$.

Då gäller:

(i) f kontinuerlig.

(ii) $\int_c^d f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d f_n(x) dx.$

Innan vi bevisar satsen diskuterar vi en viktig konstruktion av likformigt konvergenta funktionsföljder.

Sats 2) [Weierstraß M-test]

Antag att $u_k: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \geq 0$, uppfyller

$$\sum_{k=0}^{\infty} \max_{x \in [c, d]} |u_k(x)| < +\infty.$$

Definiera

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x), \quad n \geq 0,$$

och $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ (konvergerar absolut $\forall x \in [c, d]$).

Då gäller det att $f_n \rightarrow f$ likformigt.

Besvis:

$$\begin{aligned} f(x) - f_n(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) - f_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N u_k(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N u_k(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \max_x |u_k(x)|$$

För $\varepsilon > 0$:

$$\forall n \geq N_\varepsilon \quad \max_x |f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \right)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \text{ s.d. } \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

Då $\varepsilon > 0$ godtyckligt $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max_x |f(x) - f_n(x)| = 0,$

d.v.s. $f_n \rightarrow f$ likformigt.

6) Visa att $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x}{x^2+k^2}$ konvergerar likformigt mot

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2} \quad \text{på } [0, R].$$

Är konvergensen också likformig på $[0, \infty)$?

$u_k(x) = \frac{x}{x^2+k^2}$; fixera $R > 0$, definiera

$$a_k(R) = \max_{x \in [0, R]} |u_k(x)|, \quad k \geq 1.$$

$$\leq \frac{R}{k^2}$$

Använd att $x \leq R$
och $\frac{1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall x \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(R) \leq R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

Weierstraß

M-test

→

f_n konvergerar likformigt mot f (för varje fixt $R > 0$).

Vad gäller för $\max_{x \geq 0} |f(x) - f_n(x)|$?

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$$

$\{x=n\}$

→

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \geq \frac{(2n-n)}{3n} = \frac{1}{3}$$

för alla n

→ $\max_{x \geq 0} |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{3} \quad \forall n$

→ f_n konvergerar inte likformigt på $[0, \infty)$.

Beweis av Sats 1: Antag att $f_n: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerliga,
och $f_n \rightarrow f$ likförmigt.

(i) f kontinuerlig: Fix $\varepsilon > 0$, tag n s.a. $\max_{x \in [c, d]} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$.

$$\begin{aligned} \text{Tag } x \in [c, d] \rightsquigarrow \forall y \in [c, d] \quad |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(y)|. \end{aligned}$$

Da f_n kontinuerlig, $\exists \delta > 0$ s.a.

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$$

$\rightsquigarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall |x - y| < \delta \rightsquigarrow f$ kontinuerlig i x .
(x godtycklig). ~~XX~~

(ii) $\int_c^d f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d f_n(x) dx$:

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d f(x) dx - \int_c^d f_n(x) dx \right| &\leq \int_c^d |f(x) - f_n(x)| dx \\ &\leq \max_{x \in [c, d]} |f(x) - f_n(x)| \cdot (d - c) \\ &\leq (d - c) \cdot \max_{x \in [c, d]} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

da $f_n \rightarrow f$ likförmigt. ~~XX~~

_____ x _____

Kor. Antag att $u_k: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerliga,

och $\sum_{k=1}^{\infty} \max_{x \in [c, d]} |u_k(x)| < +\infty$.

Da gäller: $\int_c^d \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c^d u_k(x) dx$

Beweis:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x) \xrightarrow{\text{likf. konv.}} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

~~Sats 1~~ $\rightsquigarrow$ Weierstraß
M-test

$$\int_c^d f_n(x) dx \rightarrow \int_c^d f(x) dx$$

Kor. $c_0, c_1, c_2, \dots$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, konvergensradie $\geq R$.

(4)

$$\leadsto f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \xrightarrow[\text{likf. konvergens.}]{\quad} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \forall |x| < R,$$

och därför gäller $\int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k x^{k+1}}{k+1} \quad \forall |x| < R.$

(Inf. med
Föreläsning XIII)

Beweis: $u_k(x) = c_k x^k$

$$\text{Om } \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |x_0|^k < +\infty \leadsto \sum_{k=0}^{\infty} \max_{0 \leq x \leq x_0} |u_k(x)| < +\infty$$

(Följer nu från
Weierstraß M-test)