

Repetition:

$$f_n: [a, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f: [a, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

Def. $f_n \rightarrow f$ liktformigt om $\max_{x \in [a, d]} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0$.

Satz Om (f_n) kontinuerliga:

i) f kontinuerlig

ii) $\int_a^d f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^d f_n(x) dx$.

— * —

Tenta 25 April 2019

6) Antag $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerliga

och $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ liktformigt på $[0, 1]$.

Betrakta ODEn

$$(*) \quad \begin{cases} g_n'(x) + g_n(x) = f_n(x) \\ g_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{för } n \geq 1.$$

Visa att (g_n) konvergerar liktformigt på $[0, 1]$.

Föreläsning I:

$$\begin{aligned} g_n(x) &= e^{-x} g_n(0) + e^{-x} \int_0^x e^t f_n(t) dt \\ &= \underbrace{\frac{e^{-x}}{n}}_{\rightarrow 0} + e^{-x} \int_0^x \underbrace{e^t f_n(t)}_{\rightarrow e^t f(t)} dt \end{aligned}$$

Definiera $g(x) = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt, \quad x \in [0, 1]$

Vill visa: $\max_{x \in [0, 1]} |g(x) - g_n(x)| \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{e^{-x}}{n} + e^{-x} \int_0^x e^t (f(t) - f_n(t)) dt}_{| \cdot |} \\ &| \cdot | \leq \frac{1}{n} + \int_0^1 e^t |f(t) - f_n(t)| dt \leq \frac{1}{n} + e \cdot b_n \rightarrow 0 \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - f_n(t)| = b_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow g_n \rightarrow g$ liktformigt.

$\downarrow$
0
därför $f_n \rightarrow f$ liktf.

Ex. [Geom. summa] $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \forall |x| < 1$

(2)

$x = -y^2 \leadsto \frac{1}{1+y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^{2k} \quad \forall |y| < 1.$

$\leadsto \arctan y = \int_0^y \frac{1}{1+t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{2k+1} \quad \forall 0 \leq y < 1.$

Föreläsning XIV

Obs: $\arctan y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{2k+1}$

definierad
 $\forall y \in \mathbb{R}$
(kontinuerlig)

$\forall 0 \leq y < 1$

Leibniz: Konvergerar då $y = 1$

$\leadsto \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Dini's sats Antag att $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerliga,

och att $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \forall n \quad \forall x \in [a, b].$

Antag att $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ [gränsvärdet existerar p.g.a. monotonicitet] är kontinuerlig

Då konvergerar f_n liktformigt mot f .

Bevis: Sätt $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, så att g_n är kontinuerliga,

$g_n(x) \geq 0$, $g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \quad \forall n \quad \forall x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0 \quad \forall x$

Vill visa: $\max_{x \in [a, b]} g_n(x) = 0.$

Antag motsatsen, d.v.s. $\exists \delta > 0$ och $x_n \in [a, b]$ s.a. $g_n(x_n) \geq \delta > 0 \quad \forall n.$

Svart lada: [Bolzano-Weierstrass lemma - bevisas nästa vecka]

För varje sekvens $(x_n) \subseteq [a, b]$, $\exists$ delföljd (x_{n_k}) och $x \in [a, b]$ sådant att $x = \lim_k x_{n_k}.$

Tag nu en delföljd (x_{n_k}) och $x \in [a, b]$ så att $x_{n_k} \rightarrow x$.

(3)

$\forall m$ gäller nu $0 < \delta \leq g_{n_k}(x_{n_k}) \leq g_m(x_{n_k}) \quad \forall k$ s.d. $n_k \geq m$.

Eftersom g_m är kontinuerlig gäller $\lim_{k \rightarrow \infty} g_m(x_{n_k}) = g_m(x) \geq \delta$
m godtyckligt:

$\leadsto g_m(x) \geq \delta > 0 \quad \forall m$

Motsägelse då $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) = 0$.

X

*

kontinuerlig

Kor. Antag att $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \quad \forall x \in [a, b]$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$.

Då konv. (f_n) likformigt mot f .

Beweis: Tillämpa Dinis thm på $(f - f_n)$.

Ex. Låt $f_0(x) = 0$ och $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)} \quad \forall n \geq 0$

Konvergerar (f_n) likformigt på $[0, R]$ $\forall R > 0$?

)

Obs. $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
($\geq f_0(x)$) ($\geq f_1(x)$)

$f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$... , d.v.s. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ måste uppfylla $f(x) = \sqrt{x + f(x)}$

$\Leftrightarrow f(x)^2 = x + f(x) \Leftrightarrow (f(x) - \frac{1}{2})^2 = x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{2} \pm \sqrt{x + \frac{1}{4}} & x > 0 \end{cases}$
 $\leadsto f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} & x > 0 \end{cases}$ kontinuerlig på $[\delta, \infty)$ $\forall \delta > 0$.

Enligt korollarium: $f_n \rightarrow f$ likformigt på $[\delta, R]$ $0 < \delta < R$
ej likformigt på $[0, R]$ då f ej kontinuerlig på $[0, R]$.