

Föreläsning XVI

1

Def. $x_0 \in K \subset \mathbb{R}$, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i x_0 om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Alt. f kontinuerlig i x_0 om $\forall (x_n)$ s.d. $x_n \rightarrow x_0$ gäller att $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

1 2 dimensioner:

$(x_0, y_0) \in K \subset \mathbb{R}^2$, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig i (x_0, y_0) om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \max(|x - x_0|, |y - y_0|) < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Alt. f kontinuerlig i (x_0, y_0) om $\forall (x_n, y_n) \in K$ s.d. $\begin{cases} x_n \rightarrow x_0 \\ y_n \rightarrow y_0 \end{cases}$ gäller att $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$.

Hur visar man att en funktion är kontinuerlig?

• Räcker det att visa att $f(x, y) \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ längs med linjer från origo.

d.v.s. om $f(0, y) \rightarrow f(0, 0)$ då $y \rightarrow 0$

och $f(x, kx) \rightarrow f(0, 0)$ då $x \rightarrow 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$,

gäller det att $f(x, y) \rightarrow f(0, 0)$ oavsett hur $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

Svar: Nej!

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^4)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(0, y) = 0 \quad \forall y \neq 0 \rightsquigarrow \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = f(0, 0)$$

$$f(x, kx) = \frac{k^2 \cdot x^6}{(x^4 + k^4 x^4)^2} = \frac{k^2 x^2}{(x^2 + k^2)^2} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = f(0, 0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

$\rightsquigarrow$ Gränsvärdet existerar längs alla linjer.

Men: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{4 \cdot x^8} = \frac{1}{4} \neq 0 \rightsquigarrow f$ ej kontinuerlig!

Polära koordinater:

(2)

Antag att $(x_0, y_0) = (0, 0)$ och $f(0, 0) = 0$.

$$\forall \delta' > 0 \text{ gäller } \max(|x|, |y|) < \delta' \Rightarrow (x^2 + y^2)^{1/2} < \delta' \sqrt{2} =: \delta$$

$\leadsto f$ kontinuerlig i $(0, 0)$ om $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.d.

$$(x^2 + y^2)^{1/2} < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon.$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$G_f(r) = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |f(r \cos \theta, r \sin \theta)|, \quad r \geq 0$$

$\leadsto f$ kontinuerlig i $(0, 0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} G_f(r) = 0 \quad (1\text{-dim. gränsvärde})$$

$$\text{Ex. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

kontinuerlig i $(0, 0)$?

$$G_f(r) = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \frac{r}{2} |\cos \theta \sin \theta| < r$$

$$\leadsto \lim_{r \rightarrow 0} G_f(r) = 0 \quad \leadsto f \text{ kontinuerlig.}$$