

Föreläsning XVII

1

Def. En talföljd är monoton om antingen $a_n \geq a_{n+1} \forall n$ (avtagande) eller $a_n \leq a_{n+1} \forall n$ (växande).

* Repetition = Varje begränsad monoton talföljd är konvergent.

• Sats 1 Varje talföljd (a_n) innehåller en monoton delföljd (a_{n_k}) .

(Korollarium: Varje begränsad talföljd innehåller en konvergent talföljd.)

Beweis: Vi säger att (a_n) är en vändpkt nedåt om $a_n \leq a_{n_0} \forall n \geq n_0$.

- Antag att det finns ∞ många vändpunkter nedåt, säg $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$
($n_0 > n_1 > n_2 \dots$)
 $\leadsto$ Då gäller $a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \dots$, d.v.s.

(a_{n_k}) monoton.

- Antag att det inte finns / finns högst ändligt många vändpunkter nedåt. • Inte finns: $\forall n \exists m > n$ s.d. $a_m > a_n$

$\leadsto$ Starta med godtyckligt n_0 , välj $n_1 > n_0$ s.d. $a_{n_1} > a_{n_0}$
 $n_2 > n_1$ $a_{n_2} > a_{n_1}$
 $\vdots$

$\leadsto a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots$

• Högst ändligt många: Starta med $n_0 >$ högsta index av vändpunkterna.

$\leadsto a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots$

~~X~~

Def. En mängd $K \subset \mathbb{R}$ sluter om $\forall (x_n) \subset K$ så att $x = \lim_n x_n$ så gäller $x \in K$.

Ex. $K = [a, b]$ — om $a \leq x_n \leq b$ och $x_n \rightarrow x$ så gäller $a \leq x \leq b$.
 $\leadsto [a, b]$ sluter.

$K = (a, b]$ — $x_n = a + \frac{(b-a)}{n} \in K$, men $x_n \rightarrow a \notin K$.
 $\leadsto (a, b]$ ej sluter.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig, $t \in \mathbb{R}$

$K = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = t\}$ sluter (möjligen tom)

($(x_n) \subset K$ $f(x_n) = t$
 $x_n \rightarrow x \leadsto f(x) = t \leadsto x \in K$)

Def. En mängd $K \subset \mathbb{R}$ är kompakt om den är sluten + begränsad.

Sats (Bolzano-Weierstraß) Om $K \subset \mathbb{R}$ kpt så har varje talföljd i K en konvergent delföljd med gränsvärde i K .

Beweis

Tag en talföljd (x_n) i K .

K begränsad $\Rightarrow (x_n)$ begränsad $\Rightarrow \exists (x_{n_k})$ konvergent.

K sluten $\Rightarrow x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K$.

Tillämpning: $K \subset \mathbb{R}$ kpt, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig

Då har f ett maxvärde.

Beweis: $\beta = \sup_{x \in K} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$
 $\exists (x_n) \in K$

K kpt $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) \subset K$ och $x \in K$ s.d. $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K$

$\leadsto \beta = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$
 f antar sitt maximum β i x

Utvidgning till högre dimensioner

Def. $x_n \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}$ om $\begin{matrix} x_n^{(1)} \rightarrow x^{(1)} \\ x_n^{(2)} \rightarrow x^{(2)} \end{matrix}$ båda gränsvärden i $\mathbb{R}$

Def. $G \subset \mathbb{R}^2$ sluten om varje konvergent $(x_n) \subset G$ har ett gränsvärde i G .

Def. $K \subset \mathbb{R}^2$ kpt om sluten + begränsad

delmängd av en box
 $|x^{(1)}| \leq R$
 $|x^{(2)}| \leq R$
 för ngt. $R > 0$.

Sats (Bolzano-Weierstraß)

Om $K \subset \mathbb{R}^2$ kpt så har varje följd i K en konvergent delföljd.