

Modelltentamen i TMA 976

Examinator: Michael Björklund

1. Bestäm en lösning $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ till initialproblemet:

$$y(0) = \frac{\pi}{4} \quad \text{and} \quad y'(x) \tan y(x) = x, \quad \text{för alla } x > 0.$$

(6p)

2. Låt $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beteckna lösningen till initialproblemet:

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{and} \quad y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = \sqrt{x}, \quad \text{för } x > 0,$$

och bestäm

$$\beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{xe^{2x}}.$$

Ledtråd: Du får utan bevis använda att $\int_0^\infty e^{-x} \sqrt{x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(8p)

3. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos 2x - x \sin x}{x^4}.$$

(6p)

4. Betrakta potensserien

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2^n}}{\ln(2+n)}.$$

För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar potensserien absolut/betingat?

(5p)

5. Antag att $y_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller $y_0(x) = 0$ för all $x \in [0, 1]$ och

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2},$$

för alla $n \geq 0$ and för alla $x \in [0, 1]$.

a) Konvergerar följden (y_n/n) likformigt på intervallet $[0, 1]$?

(6p)

b) Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n(1/n)}{n} = \frac{\pi}{4}.$$

(6p)

6. Visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \sqrt{tk}} = \frac{2}{\sqrt{t}}, \quad \text{för alla } t > 0.$$

Är konvergensen likformig på $[1, \infty)$?

Ledtråd: Använd integralkriteriet! (7p)

7. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x+y) \sin(x+y)}{2x^2 + y^2 + 3xy}.$$

Ledtråd: Vad är $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$? (6p)