

Tentamen i Matematisk analys,
fortsättningskurs F/TM, TMA976
17 Januari 2020, kl. 14.00-18.00

Examinator och tentarondsansvarig: Michael Björklund

Inga tillåtna hjälpmedel.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Bestäm en lösning $y : (-\infty, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ till initialvärdesproblemet

$$y(1) = 0 \quad \text{och} \quad xy'(x) = y(x)^2 + 3y(x) + 2.$$

Ledtråd: Använd likheten $\frac{1}{(1+y)(2+y)} = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{2+y}$. (7p)

2. Givet ett heltal $n \geq 1$, låt $y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beteckna lösningen till initialvärdesproblemet

$$y_n(0) = y'_n(0) = 0 \quad \text{och} \quad y''_n(x) - 2\alpha_n y'_n(x) + \alpha_n^2 y_n(x) = x^2 e^{\alpha_n x},$$

där $\alpha_n = 4n \ln n$. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\left(\frac{1}{n}\right)$. (8p)

3. För vilka reella β konvergerar serien

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^\beta}{(\ln n)^2} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right|?$$

Ledtråd: Jämför med serien vars termer är $\frac{n^{\beta-2}}{(\ln n)^2}$ för $n \geq 5$. (7p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x(1-x)) - 1 + \frac{x}{2} \sin x}{x^3}. \quad (7p)$$

5. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{n^2}$? Ange även för vilka x denna konvergens är betingad.

Ledtråd: Observera att n^2 är udda om och endast om n är udda. (6p)

6. Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1-\varepsilon} x^n (1-x)^{1/3} dx.$$

existerar. Om det gör det, så skall detta gränsvärde beräknas.

Ledtråd: Använd geometrisk summation. (9p)

7. Avgör huruvida gränsvärdet

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0}} \frac{\frac{\sin(xy)}{x} + \sin x^2}{x^2 + y^2}$$

existerar eller inte. Om det existerar, så skall även dess värde beräknas. (6p)