Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2019 10 31, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Malin Nilsson, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Hitta med hjälp av Laplacetransformen en funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sådan att

$$u''(t) + 3u'(t) = \cos t$$

med begynnelsevärden $u(0) = 0$ och $u'(0) = 1$. (5p)

2. Finns det en holomorf funktion $f : D(0, 1) \to \mathbb{C}$ sådan att

$$\mathrm{Re}(f(z)) = e^{-\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)}?$$

Motivera ditt svar. (3p)

3. Låt M vara en Möbiusavbildning sådan att $M(-1) = 2, M(e^{\pi i/3}) = e^{\pi i/3}$ och $M(e^{-\pi i/3}) = e^{-\pi i/3}$. Bestäm $M(D(0, 1))$. (5p)

4. (a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av

$$f(x) := \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$

(7p)

(b) Använd resultatet i a) för att bestämma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx.$$

(1p)

5. Hitta antalet nollställen till funktionen $z^3 - 2z + 3$ i området $\{z : |z - 4i| > 1, \mathrm{Im}(z) > -1\}$. (7p)

6. Låt

$$f(z) := \frac{z}{(z + 3)(z^2 + 1)}.$$

(a) Bestäm Laurentserieutvecklingen av $f(z)$ som är centrerad i 0 och konvergent i $\{z : |z| > 3\}$. (5p)

(b) Bestäm $\mathrm{Res}_0(g(z))$ där

$$g(z) := \frac{f(1/z)}{z^5}.$$

(2p)

7. Formulera och bevisa Residysatsen. (5p)

8. Formulera och bevisa Argumentprincipen. (5p)

9. Låt f vara en hel funktion sådan att $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$. Visa att f är ett polynom i z. (5p)

Lycka till!
David