

1. Bestäm absolut maximum och absolut minimum för $f(x) = |x^2 - 9|$ med $D_f = [-4, 4]$.

Lösning: Observera att $f(x) = x^2 - 9$ när $|x| \geq 3$. Eftersom $f'(x) = 2x$ är aldrig noll när $|x| \geq 3$, ser vi att f har inga kritiska punkter när $|x| \geq 3$. När $|x| < 3$, har vi $f(x) = 9 - x^2$ så $f'(x) = -2x$, och det är noll när $x = 0$. Så f har en kritisk punkt i $x = 0$.

Det är inte svårt att bevisa att -3 och 3 är singulära punkter för f . Men eftersom $f(x) \geq 0$ för varje x och $f(-3) = f(3) = 0$ är det klart att f ska ha absolut minimum i båda punkter -3 och 3 .

För att hitta absolut maximum, vi jämförar $f(0) = 9$, och värder på ändpunkter; $f(-4) = 16 - 9 = 7$, och $f(4) = 16 - 9 = 7$. Så f har absolut maximum i punkt 0 , och det är lika med 9 .

SVAR: Absolut maximum är 9 ; absolut minimum är 0 .

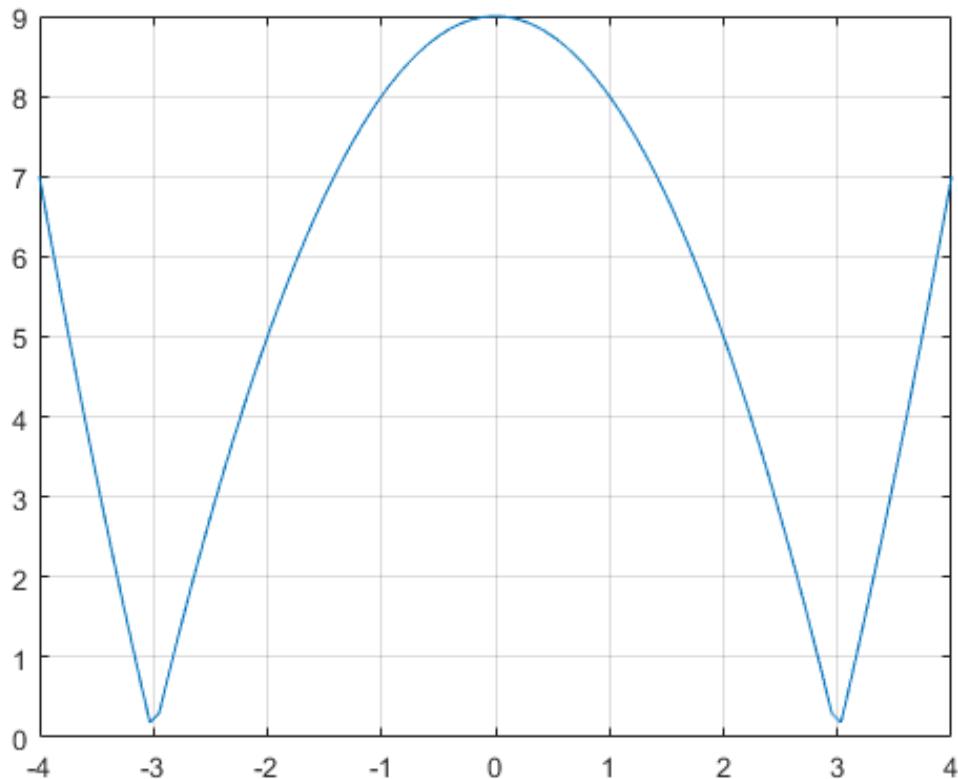


Fig. Grafen av $f(x)$

2. (I denna uppgift beaktas endast svaret. Rätt svar 1 poäng, fel svar 0 poäng)

(a) Låt $f(x) = \ln(\ln(x))$. Beräkna $f'(x)$ för $x > 1$.

(b) Bestäm på vilket intervall funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 19$ är avtagande.

Lösning: För (a), användna kedjeregeln för $f = g \circ g$ när $g(x) = \ln x$. Det blir

$$f'(x) = g'(\ln x)g'(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}.$$

För (b). Kom ihåg att polynomen f är avtagande när $f'(x) < 0$. Räkna $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3(x^2 - 2x) = 3x(x - 2)$. Vi ser att $f'(x) < 0$ om och endast om x tillhör i $(0, 2)$. Då $f(x)$ är avtagande på intervallet $[0, 2]$ (att svara intervallet $(0, 2)$ är också okej).

3. Skriv sant eller falskt om följande påståenden. Du behöver inte motivera dig. Varje rätta svar ger 0.5p.

- (a) Om $f'(a)$ existerar så är f kontinuerlig i punkten $x = a$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^2)}{x^2} = 0$.
- (c) Det existerar en punkt c mellan 0 och 1 sådan att $\sin(1) = \cos(c)$.
- (d) Om $f''(x) > 0$ för varje x i $[a, b]$ så är $f(x) \geq L(x)$ för varje x i $[a, b]$, där $L(x)$ är linjariseringen av $f(x)$ i en punkt c i $[a, b]$.

Lösning:

(a) SANT, se Sats 1 på s. 109.

(b) SANT, eftersom (enligt räkneregler för gränsvärden och Sats 8 s.122)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

(c) SANT, eftersom, enligt medelvärdesatsen (s.138), för funktionen $f(x) = \sin x$ vi har $f(1) - f(0) = f'(c)(1 - 0)$ för någon c mellan 0 och 1. Det förenklas till $\sin 1 = \cos c$.

(d) SANT, Vi har $f(x) = L(x) + E(x)$ och enligt Sats 11 (s.272)

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x - c)^2$$

för någon s mellan x och c . Om vi vet $f''(s) > 0$, då är $E(x) \geq 0$ (och $E(x) = 0$ bara när $x = c$), så $f(x) = L(x) + E(x) \geq L(x)$.