

.....

Tentamen i MVE460: Envariabelanalys och analytisk geometri

Tisdag 29:e oktober 2019, 8:30–12:30

Lösningar

.....

1. Anta att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ och $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Enligt definitionen, bevisa att $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$. (6p)

Lösning: Se Adams s. 90.

2. Formulera och bevisa produktregeln för derivering. (6p)

Lösning: Se Adams s. 111.

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Ange alla eventuella lokala extrempunkter, inflektionspunkter och asymptoter, samt bestäm på vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande och konvex respektive konkav. (10p)

Lösning: Observera först att f är definerad i hela reella linje: $D_f = \mathbb{R}$.

Lodräta asymptoter: Finns inga, eftersom $D_f = \mathbb{R}$.

Vågräta asymptoter: Observera att om $x \neq 0$, vi har

$$|f(x)| \leq \frac{|x|}{|x|^2} = |x|^{-1}.$$

Därför $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Så linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot när $x \rightarrow \pm\infty$.

Sneda asymptoter: Finns inga, eftersom asymptoten när $x \rightarrow \pm\infty$ är vågrät.

Vi ska nu leta efter lokala extrempunkter:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vi ser att -1 och 1 är möjliga extrempunkter; vi ska senare undersöka situationen med hjälp av teckentabell.

För att hitta möjliga inflektionspunkter vi räknar

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}.$$

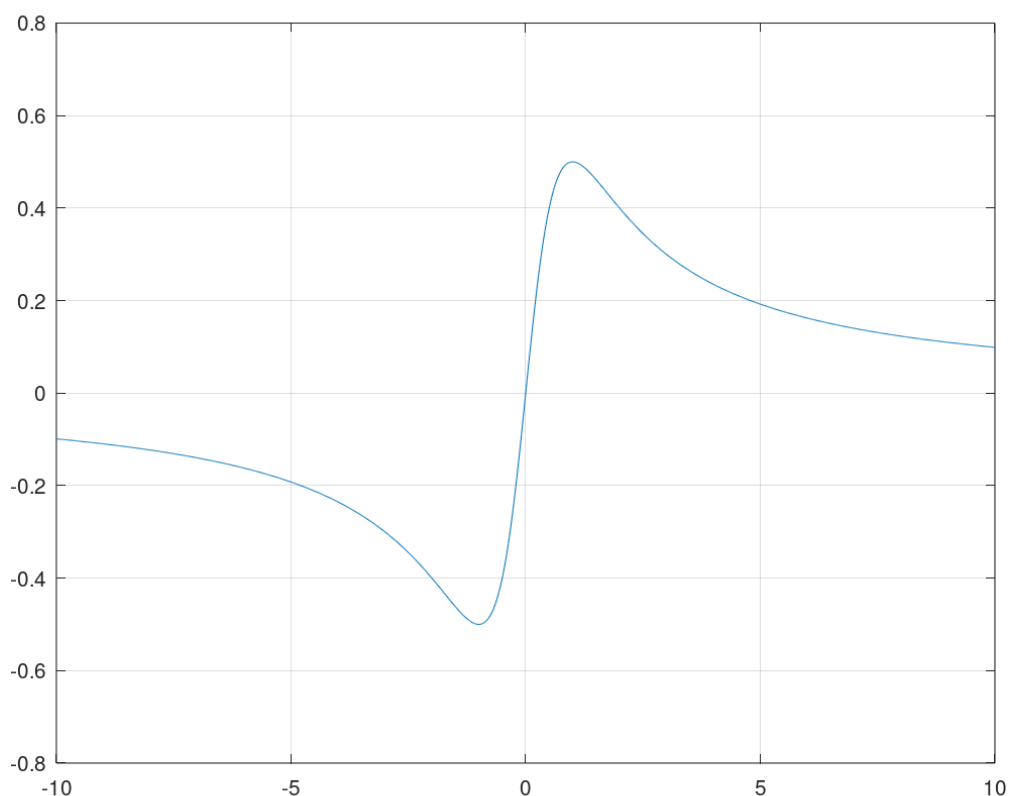
Vi ser att $f''(x) = 0$, när $2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3) = 0$, dvs. när $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{3}$. Dessa punkterna är möjliga inflektionspunkter.

Teckentabell:

x		$\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
f	$\cap$		$\cup$	$\cup$	$\cup$		$\cap$	$\cap$	$\cap$		$\cup$

Från teckentabell, vi ser att f har lokal minimum i -1 : $f(-1) = -1/2$, och lokal maximum i 1 : $f(1) = 1/2$. Både är också absolut. Vi ser också att $-\sqrt{3}$, 0 och $\sqrt{3}$ är alla inflektionspunkter.

Från teckentabell, vi ser att f är växande i $(-1, 1)$ och avtagande i $(-\infty, -1)$ och $(1, \infty)$. Också, f är konvex i $(-\sqrt{3}, 0)$ och $(\sqrt{3}, \infty)$, och konkav i $(-\infty, -\sqrt{3})$ och $(0, \sqrt{3})$.



4. Beräkna Taylorpolynomet för $f(x) = e^{\sin x}$ av ordning 3 kring $x = 0$. (6p)

Lösning: Taylorpolynomet av f av ordning 3 kring $x = 0$ ges av:

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Vi räknar:

$$f'(x) = \cos x e^{\sin x}$$

$$f''(x) = -\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x}$$

$$f'''(x) = -\cos x e^{\sin x} - \sin x \cos x e^{\sin x} - 2 \sin x \cos x e^{\sin x} + \cos^3 x e^{\sin x}$$

Då, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$ och $f'''(0) = 0$. Därför

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

5. Beräkna gränsvärdet

(6p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x)) - \sin(x)}{x^2}.$$

Lösning: Eftersom $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(\sin(x)) - \sin(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, att bara sätta in båda gränsvärden ger en obestämd uttryck "0/0". Vi fortsätter med hjälp av l'Hôpitals regeln. Derivatan av täljaren är

$$\cos(\sin(x)) \cos(x) - \cos(x) = \cos(x) (\cos(\sin(x)) - 1),$$

och derivatan av nämnaren är $2x$. Vi undersöker gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) (\cos(\sin(x)) - 1)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - 1}{x},$$

som ännu blir "0/0". Vi använder l'Hôpitals regeln igen, och får

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\sin(\sin(x)) \cos(x) = 0.$$

Då har vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x)) - \sin(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(x)) - 1}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} -\sin(\sin(x)) \cos(x) = 0.$$

6. Bestäm ekvationen för planet som innehåller punkterna $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 5, 6)$ och $C = (3, 2, 1)$. (6p)

Lösning: Planet innehåller vektorer $\overrightarrow{AB} = 3i + 3j + 3k$, och $\overrightarrow{AC} = 2i - 2k$ (visst kunde vi dividera första vektoren med 3 och andra vektoren med 2, så räkningen skulle vara enklare). Vi kan hitta normalen med hjälp av kryssprodukt

$$n_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6i + 12j - 6k.$$

Det är rimligt att 'normalisera' (dividera med -6) vektoren n_1 och ta $n = i - 2j + k$.

Planet består om alla punkter $P = (x, y, z)$, för vilken $\overrightarrow{AP} = (x - 1)i + (y - 2)j + (z - 3)k$ är vinkelrätt mot n . Denna kondition kan vi undersöka med hjälp av skalärprodukt:

$$\overrightarrow{AP} \cdot n = (x - 1) - 2(y - 2) + (z - 3) = 0.$$

Alltså, planet ges av

$$x - 2y + z = 0.$$

7. Bestäm konstanterna a och b , så att $w = 2i + aj - bk$ är vinkelrät mot vektorerna $u = i - k$ och $v = -2i - 2j$. (6p)

Lösning: Vektoren w är vinkelrät mot u och v , om $w \cdot u = w \cdot v = 0$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2 + b = 0 \\ -4 - 2a = 0 \end{cases}$$

Vi ser att om $a = b = -2$, då är konditionen uppfylld. Man kunde också använda kryssprodukt här.

8. Anta att funktionen $f(x)$ med definitionsmängd $D_f = [-1, 1]$ är kontinuerlig och uppfyller $f(x) = f(x/n)$ för varje x i $[-1, 1]$ och n i $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Bevisa att f är konstant. (4p)

Lösning: Om x tillhör i D_f , då har vi $|x/n - 0| \leq 1/n$. Ta $\varepsilon > 0$. Eftersom f är kontinuerlig i 0, kan vi hitta $\delta > 0$ så att $0 < |y - 0| < \delta$ garanterar $|f(y) - f(0)| < \varepsilon$. Om x tillhör i D_f och $n > 1/\delta$, då är $|x/n - 0| \leq 1/n < \delta$. Så $|f(x) - f(0)| = |f(x/n) - f(0)| < \varepsilon$. Eftersom $\varepsilon > 0$ var godtycklig, måste vi ha $f(x) = f(0)$, så f är konstant.

.....