

Tentamen LMA 401

Datum: 26 oktober 2019

Telefonvakt: Axel Flinth, 0701-757469

Hjälpmedel: Linjal, penna, kladdpapper, ordbok.

Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5.
Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**

Tentamen består av **åtta (8)** uppgifter. Tesen består av **tre (3)** blad.

Lycka till!

Uppgift 1

Derivera följande funktioner

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) \ln(x), \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1 + \cos(x))^2, \quad h :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Tips: Du behöver inte göra några algebraiska förenklingar av svaren. (6p)

Uppgift 2

Beräkna följande gränsvärden, eller motivera varför de inte existerar

$$\alpha_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + x^8 - 3}{5^x - x^3 + 8x}, \quad \alpha_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x}, \quad \alpha_3 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)^3 + (t-1)^2}{(t-1) + (t-1)^4}$$

(6p)

Uppgift 3

Beräkna följande integraler

$$I_1 = \int_0^2 2xe^{x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx, \quad I_3 = \int_0^{2\pi} x \cos(x) dx$$

(7p)

Uppgift 4

(a) Beräkna Taylor-utvecklingen av grad 2 med utvecklingspunkt $x = 0$ för funktionen

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x^2}.$$

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}.$$

(6p)

Uppgift 5

Betrakta funktionen

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 1)e^{-x}.$$

(a) Hitta och klassificera g 's samtliga stationära punkter. Om g inte har några stationära punkter, motivera varför.

(b) Vilket är det största och minsta värdet för g **på det kompakta intervallet** $[0, 1]$?

(c) Har g ett största och minsta värde **på** $\mathbb{R}$? Bestäm i sådana fall dessa.

(7p)

Uppgift 6

Betrakta integralerna

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Vilken/vilka av dem konvergerar?

(6p)

Uppgift 7

Bevisa att det finns ett tal $\xi \in \mathbb{R}$ med

$$\cos(\xi)(\sqrt{\xi^2 + 1} - \xi) = \frac{1}{e}$$

(6p)

Uppgift 8

Ur en kvadrat med sidlängd 1 dm skärs fyra kvadratiske hörn med längden a ut för att bygga en kvadratisk vätskebehållare utan lock. Bestäm det värde på a som gör att behållaren rymmer så mycket vätska som möjligt. (7p)

