Tentamen LMA 401

Datum: 26 oktober 2019
Telefonvakt: Axel Flinth, 0701-757469
Hjälpmedel: Linjal, penna, kladdpapper, ordbok.
Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**
Tentamen består av **åtta (8)** uppgifter. Tesen består av **tre (3)** blad.

Lycka till!

Uppgift 1

Derivera följande funktioner

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)\ln(x), \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1+\cos(x))^2, \quad h :]0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Tips: Du behöver inte göra några algebraiska förenklingar av svaren. (6p)

Lösning: För att derivera f använder vi produktregeln:

$$f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}.$$

För att derivera g använder vi kedjeregeln

$$g'(x) = 2(1+\cos(x)) \cdot (-\sin(x)).$$

För att räkna ut h:s derivata använder vi kvotregeln

$$h'(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x(1-2\ln(x)}{x^4}.$$

Uppgift 2

Beräkna följande gränsvärden, eller motivera varför de inte existerar

$$\alpha_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^8 - 3}{5^x - x^3 + 8x}, \quad \alpha_2 = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x}, \quad \alpha_3 = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)^3 + (t-1)^2}{(t-1)+(t-1)^4}$$

(6p)

Lösning: (α_1) Vi bryter ut den starkast växande termen $x \mapsto 5^x$ i täljare och nämnare

$$\alpha_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^8 - 3}{5^x - x^3 + 8x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2^x}{5^x} + \frac{x^8}{5^x} - \frac{3}{5^x}}{1 - \frac{x^3}{5^x} + \frac{8x}{5^x}}.$$

Här går alla termer mot 0 förutom 1, eftersom exponentialfunktioner växer snabbare än polynom, och $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{5^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0$. Gränsvärdet är alltså lika med

$$\alpha_1 = \frac{0+0-0}{1-0+0} = 0.$$

(α_2) $\cos(x)$ går mot 1 när x går mot 0. Gränsvärdet är alltså av typen "1/0". För att förstå exakt vad som händer när $x \to 0$ beräknar vi de ensidiga gränsvärdena var för sig

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x)}{x} = \text{"}\frac{1}{0^-}\text{"} = -\infty.$$

De är alltså olika, och därför existerar inte gränsvärdet.

(α_3) Här ser vi att när x är nära 1 så kommer $(x-1)$ vara mycket större än var och en av de andra termerna. Vi bryter därför ut den termen i täljaren och nämnaren

$$\lim_{t\to 1} \frac{(t-1)^3 + (t-1)^2}{(t-1) + (t-1)^4} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)^2 + (t-1)}{1 + (t-1)^3} = \frac{0^2 + 0}{1 + 0^3} = 0.$$

Uppgift 3

Beräkna följande integraler

$$I_1 = \int_0^2 2xe^{x^2}dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx, \quad I_3 = \int_0^{2\pi} x\cos(x)dx$$

(7p)

Lösning: (I_1) Vi gör substitutionen $t = x^2$

$$\int_0^2 2xe^{x^2}dx = \begin{bmatrix} t = x^2 & \Rightarrow dt = 2xdx \\ t = 0 & \Rightarrow x = 0 \\ t = 2 & \Rightarrow x = 4 \end{bmatrix} = \int_0^4 e^t dt = \left[e^t\right]_{t=0}^4 = e^4 - 1.$$

(I_2) Vi börjar med att göra en partialbråksuppdelning. Ansatsen är som följer:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)}.$$

Vi behöver alltså välja A och B så att

$$1 = A(x+2) + B(x+1).$$

Sätter vi $x = -2$ får vi $1 = A\cdot 0 + B(-2+1) = -B$ och sätter vi $x = -1$ får vi $1 = A\cdot(-1+2) + B\cdot 0 = A$, så att

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Nu kan vi räkna ut integralen. Vi påpekar att integranden inte har några singulariteter i integrationsintervallet, så att vi inte behöver betrakta den som en generaliserad integral.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+1)}dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}dx = \left[\ln|x+1| - \ln|x+2|\right]_0^1 \\ &= (\ln|1+1| - \ln|1+2|) - (\ln|0+1| - \ln|0+2|) \\ &= \ln(2) - \ln(3) - \ln(1) + \ln(2) = 2\ln(2) - \ln(3).\end{aligned}$$

(I_3) Vi använder partiell integration. Vi integrerar $\cos(x)$ och låter x stå:

$$\int_0^{2\pi} x\cos(x)dx = [x\sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1\cdot\sin(x)dx = [x\sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x)dx$$

Eftersom $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$ så är $[x\sin(x)]_0^{2\pi} = 0$. För den kvarvarande integralen gäller

$$-\int_0^{2\pi} \sin(x)dx = -[-\cos(x)]_0^{2\pi} = -(-\cos(2\pi) - (-\cos(0))) = -(-1-(-1)) = 0.$$

Uppgift 4

(a) Beräkna Taylor-utvecklingen av grad 2 med utvecklingspunkt $x = 0$ för funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x^2}.$$

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}.$$

(6p)

(a) Vi beräknar första och andra derivatan av g

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$g''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}\cdot 1 - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{\frac{1+x^2}{-}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

Sätter vi in $x = 0$ får vi

$$g(0) = \sqrt{1+0^2} = 1,\ g'(0) = \frac{0}{\sqrt{1+0^2}} = 0,\ g''(0) = \frac{1-2\cdot 0^2}{(1+0^2)\sqrt{1+0^2}} = 1.$$

Enligt formeln för Taylorutvecklingar gäller alltså för Taylorpolynomet p_2 av grad 2 med utvecklingspunkt 0

$$p_2(x) = 1 + 0\cdot x + \frac{1}{2!}x^2 = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

(b) Enligt Taylors sats gäller

$$\sqrt{1+x^2} = p_2(x) + x^3B(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3B(x)$$

för en begränsad funktion B. Således gäller

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}+x^3B(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} + xB(x) = \frac{1}{2}.$$

Uppgift 5

Betrakta funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 1)e^{-x}.$$

(a) Hitta och klassificera g:s samtliga stationära punkter. Om g inte har några stationära punkter, motivera varför.

(b) Vilket är det största och minsta värdet för g **på det kompakta intervallet** $[0, 1]$?

(c) Har g ett största och minsta värde **på** $\mathbb{R}$? Bestäm i sådana fall dessa.

(7p)

Lösning: (a) För att hitta de stationära punkterna bildar vi först g:s derivata:

$$g'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} = e^{-x}(2x - 1 - x^2).$$

Vi använde produktregeln. Vi ser att derivatan blir 0 precis då

$$2x - 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = + \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1.$$

Den enda stationära punkten är alltså $x = 1$.

För att klassificera den stationära punkten genomför vi en teckenstudie. Vi har $g'(x) = -(x - 1)^2 e^{-x}$

x		1	
$-(x-1)^2$	-	0	-
e^{-x}	$+$	$+$	$+$
f'	-	0	-
f	$\searrow$		$\searrow$

$x = 1$ är alltså en *terrasspunkt.*

(b) Vi ser ur teckenstudiet i förra uppgiften att g är avtagande på hela intervallet $[0, 1]$. Således antas det största värdet i den vänstra randpunkten $x = 0$ och det minsta värdet i $x = 1$. Det största värdet blir $(0^2 + 1)e^-0 = 1$ och det minsta värdet blir $(1^2 + 1)e^{-1}) = \frac{2}{e}$.

(c) Eftersom g är strikt avtagande i hela $\mathbb{R}$ kan vi dra direkt dra slutsatsen att g varken har ett största eller minsta värde.

Uppgift 6

Betrakta integralerna

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Vilken/vilka av dem konvergerar? (6p)

Lösning: I_1 divergerar. För att bevisa detta jämför vi med den divergenta integralen $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos(x)}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0.$$

Jämförelsesatsen ger nu påståendet.

I_2 konvergerar däremot, eftersom att integranden i I_2 är är kontinuerlig och begränsad i $]0,1[$. Den enda punkten där $\frac{\sin(x)}{x}$ skulle kunna ha en asymptot är i $x = 0$, men

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

så är den begränsad även när vi närmar oss 1.

Man kan om man vill också formellt jämföra med den självklart konvergenta integralen $\int_0^\pi 1dx$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\sin(x)}{x}}{1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Uppgift 7

Bevisa att det finns ett tal $\xi \in \mathbb{R}$ med

$$\cos(\xi)(\sqrt{\xi^2+1} - \xi) = \frac{1}{e}$$

(6p)

Lösning: Betrakta funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)(\sqrt{x^2+1} - x).$$

g är kontinuerlig (som en kombination av andra kontinuerliga funktioner). Vi har också

$$g(0) = \cos(0)(\sqrt{0^2+1} - 0) = 1 > \frac{1}{e}$$
$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} - \frac{\pi}{2}\right) = 0 < \frac{1}{e}$$

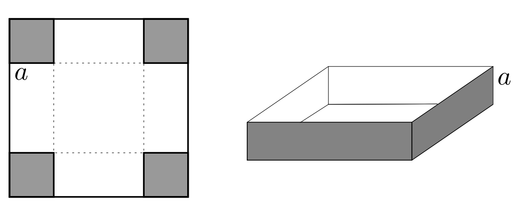
Satsen om mellanliggande värden implicerar nu att det existerar ett $\xi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ med

$$g(\xi) = \frac{1}{e}.$$

Uppgift 8

Ur en kvadrat med sidlängd 1 dm skärs fyra kvadratiska hörn med längden a ut för att bygga en kvadratisk vätskebehållare utan lock. Bestäm det värde på a som gör att behållaren rymmer så mycket vätska som möjligt.

(7p)



Lösning: Behållarens volym ges av bottenplattans area gånger behållarens höjd. Höjden ges av a, och bottenplattans area är lika med plattans sida i kvadrat. Bottenplattans sida är lika med $(1 - 2a)$, så att volymen är lika med

$$V(a) = a(1 - 2a)^2.$$

Eftersom två sidor a måste få plats på den ursprungliga plattan så måste $2a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2}$. Det vi söker är alltså lösningen på optimeringsproblemet

$$\max_{0 \leq a \leq \frac{1}{2}} a(1-2a)^2$$

Vi har

$$V'(a) = (1-2a)^2 + a \cdot 2(1-2a) \cdot (-2) = (1-2a)((1-2a)-4a) = (1-6a)(1-a)$$

V' har alltså två nollställen: $a_1 = \frac{1}{6}$ och $a_2 = 1$. Bara det ena av dessa ligger i det relevanta intervallet $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Vi får följande teckenschema för derivatan:

a	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
$(1-a)$		-	-	-	0
$(1-4a)$		-	0	$+$	$+$
V'		$+$	0	-	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

Vi ser att V är maximal när $a = \frac{1}{6}$.