

Tentamen LMA 401

Datum: 8 januari 2020

Telefonvakt: Axel Flinth, 0701-757429

Hjälpmedel: Linjal, penna, kladdpapper, ordbok.

Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**

Tentamen består av *åtta (8)* uppgifter. Tesen består av *två (2)* blad.

Lycka till!

Uppgift 1

Derivera följande funktioner

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)x^2, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x^2), \quad h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}.$$

Tips: Du behöver inte göra några algebraiska förenklingar av svaren. (6p)

Uppgift 2

Beräkna följande gränsvärden, eller motivera varför de inte existerar

$$\alpha_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{8t^2 + 9t^3 - t^4}{t + 4t^2}, \quad \alpha_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{x}, \quad \alpha_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8 + \sin(x)}{e^x}$$

(6p)

Uppgift 3

Beräkna följande integraler

$$I_1 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx, \quad I_2 = \int_1^2 \frac{2-x}{x(x+2)} dx, \quad I_3 = \int_0^{2\pi} x^2 \cos(x) dx$$

Tips: Tänk på att $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$ (7p)

Uppgift 4

(a) Beräkna Taylor-utvecklingen av grad 3 med utvecklingspunkt $x = 0$ för funktionen

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

(6p)

Uppgift 5

Betrakta funktionen

$$h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x} - e^{-x}$$

1. Hitta och klassificera alla h :s stationära punkter.
2. Har h ett största värde? Har h ett minsta värde?

(7p)

Uppgift 6

Konvergerar integralen

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx?$$

(6p)

Uppgift 7

Kan det existera en kontinuerlig funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ med

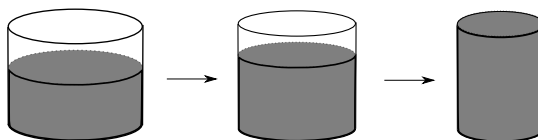
- (i) $f(x)^2 > 0$ för alla $x \in [0, 1]$
- (ii) $f(0) = 1$ och $f(1) = -1$?

Ange en sådan funktion eller motivera varför den inte kan existera.

(6p)

Uppgift 8

En cylinderformad behållare med radien 1 längdenhet och höjden 1 längdenhet är fylld med $\pi/8$ volymenheter vatten. Behållaren dras nu åt så att radien minskar med en konstant hastighet av 0.1 längdenhet per sekund.



Radien minskar lika mycket överallt, så att cylinderformen bibehålls. Det går tillräckligt långsamt för att vattenytan hela tiden hålls plan. Speciellt hålls mängden vatten i behållaren konstant, fram tills att vattnet rinner över.

Med vilken hastighet stiger vattenytan i det ögonblick vattnet rinner över?

(6p)