Tentamen LMA 401/LMA 400

Datum: 8 januari 2020
Telefonvakt: Axel Flinth 0701-757469
Hjälpmedel: Linjal, penna, kladdpapper, ordbok.
Betygsgränser: 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**
Tentamen består av *åtta (8)* uppgifter. Tesen består av *två (2)* blad.

Lycka till!

LÖSNINGAR

Uppgift 1

Derivera följande funktioner

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)x^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x^2), \quad h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}.$$

Tips: Du behöver inte göra några algebraiska förenklingar av svaren. (6p)

Lösning. f: Produktregeln implicerar att

$$f'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x).$$

g: Kedjeregeln implicerar att

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x.$$

h: Kvotregeln ger

$$h'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{1+x^2} - 1 \cdot \arctan(x)}{x^2}$$

□

Uppgift 2

Beräkna följande gränsvärden, eller motivera varför de inte existerar

$$\alpha_1 = \lim_{t\to 0} \frac{8t^2+9t^3-t^4}{t+4t^2} \quad \alpha_2 = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x}, \quad \alpha_3 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^8+\sin(x)}{e^x}$$

(6p)

Lösning. $\underline{\alpha_1}$: Vi bryter ut t ur täljare och nämnare och använder därefter att ett gränsvärde av en produkt/kvot/summa är motsvarande produkt/kvot/summa för gränsvärden.

$$\alpha_1 = \lim_{t\to 0} \frac{8t^2+9t^3-t^4}{t+4t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{8t+9t^2-t^3}{1+4t} = \frac{8\cdot 0+9\cdot 0^2-0^3}{1+4\cdot 0} = 0.$$

$\underline{\alpha_2}$: Eftersom ln och kvadreringsfunktionen är kontinuerliga gäller det att $\lim_{x\to 1}\ln(x^2) = \ln(1^2) = 0$. Därur följer, tillsammans med räknereglerna som nämndes ovan,

$$\alpha_2 = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2)}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\underline{\alpha_3}$: Låt oss först skriva om

$$\frac{x^8+\sin(x)}{e^x} = \frac{x^8}{e^x} + \frac{\sin(x)}{e^x}.$$

Det är välkänt att exponentialfunktioner växer fortare än polynomfunktioner, så att $\lim_{x\to\infty}\frac{x^8}{e^x} = 0$. Vidare gäller $-1 \le \sin(x) \le 1$ för varje x, så att

$$-\frac{1}{e^x} \le \frac{\sin(x)}{e^x} \le \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}.$$

Instängningssatsen implicerar därför att även $\frac{\sin(x)}{e^x} \to 0$ för $x\to\infty$. Det gäller alltså

$$\alpha_3 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^8+\sin(x)}{e^x} = \frac{x^8}{e^x} + \frac{\sin(x)}{e^x} = 0.$$

□

Uppgift 3

Beräkna följande integraler

$$I_1 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)dx, \quad I_2 = \int_1^2 \frac{2-x}{x(x+2)}dx, \quad I_3 = \int_0^{2\pi} x^2\cos(x)dx$$

Tips: Tänk på att $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$ (7p)

Lösning. $\underline{I_1}$: Vi substituerar $t = \ln(x)$

$$\int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)dx = \begin{bmatrix} t & = \ln(x) \\ dt & = \frac{1}{x}dx \\ x=1 & \Rightarrow t=0 \\ x=e & \Rightarrow t=1 \end{bmatrix} = \int_0^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$\underline{I_2}$: Vi börjar med att göra en partialbråksuppdelning med hjälp av ansatsen

$$\frac{2-x}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} \Leftrightarrow 2-x = A(x+2)+Bx.$$

Sätter vi $x=0$ får vi $A\cdot 2 = 2 \Rightarrow A = 1$, och sätter vi $x=-2$ får vi $2-(-2) = -2B \Rightarrow B = -2$. Vi har alltså

$$\frac{2-x}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+2}.$$

Vi kan nu integrera

$$\int_1^2 \frac{2-x}{x(x+2)}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+2}\right) dx = [\ln(x) - 2\ln(x+2)]_1^2 = \ln(2) - 2\ln(4) - (\ln(1) - 2\ln(3))$$
$$= 2\ln(3) + \ln(2) - 2\ln(4) = \ln\left(\frac{2\cdot 3^2}{4^2})\right) = \ln\left(\frac{9}{8})\right).$$

$\underline{I_3}$: Vi integrerar partiellt

$$\int_0^{2\pi} x^2\cos(x)dx = [\sin(x)x^2]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\sin(x)dx.$$

Eftersom $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$ försvinner randtermerna. Vi kan nu integrera partiellt en gång till

$$-\int_0^{2\pi} 2x\sin(x)dx = [\cos(x)\cdot 2x]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\cos(x)dx = 4\pi\cdot\cos(2\pi) - 0\cdot\cos(0) - 2[\sin(x)]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

I sista steget använde vi återigen att $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$. □

Uppgift 4 skiljde sig åt på de båda tentorna.

Uppgift 4, LMA401

(a) Beräkna Taylor-utvecklingen av grad 3 med utvecklingspunkt $x = 0$ för funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2}{x^3}.$$

(6p)

Lösning. $\underline{(a)}$: Vi beräknar g:s första tre derivator

$$g'(x) = e^x - 1 - x,\ g''(x) = e^x - 1,\ g'''(x) = e^x.$$

Speciellt får vi alltså

$$g(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0,\ g'(0) = 1 - 1 - 0 = 0,\ g''(0) = 1 - 1 = 0,\ g'''(x) = 1,$$

och därmed Taylorutvecklingen

$$p_3(x) = 0 + 0\cdot x + \frac{0}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}x^3 = \frac{x^3}{6}.$$

$\underline{(b)}$: *Här var tesen behäftad med ett smärre tryckfel – det var meningen att gränsvärdet skulle vara*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}.$$

Då (a)-uppgiften verkligen gör ovanstående (b)-uppgift naturlig, fick de som löste uppgiften med ovanstående som utgångspunkt enligt nedan därför full poäng.

Enligt ovan har vi

$$g(x) = \frac{x^3}{6} + x^4 B(x)$$

för en begränsad funktion $B(x)$. Därför gäller

$$\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{6} + x^4 B(x)}{x^3} = \frac{1}{6} + xB(x) \to \frac{1}{6}, \quad x \to 0.$$

I det sista steget använde vi att B är begränsad, resp. instängningssatsen.

Lösningsförsök för den uppgiften som stod på papperet gav givetvis också poäng. En korrekt lösning för den uppgiften skulle kunna se ut så här.

Vi har, enligt ovan

$$e^x - 1 - x - x^2 = g(x) + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x^4 B(x)$$

för en begränsad funktion B. Vi har således

$$\frac{e^x - 1 - x - x^2}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x^4 B(x)}{x^3} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{6} + xB(x).$$

Här gäller, då B är begränsad, att $xB(x) \to 0$, $x \to 0$. Därför följer

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x - x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} + \frac{1}{6} + xB(x) = \text{"}\infty + \frac{1}{6} + 0\text{"} = \infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1 - x - x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2x} + \frac{1}{6} + xB(x) = \text{"} - \infty + \frac{1}{6} + 0\text{"} = -\infty.$$

Gränsvärdet existerar alltså inte.

□

Uppgift 4, LMA400

Lös följande begynnelsevärdesproblem

(a) $\frac{y' y^3}{\cos(x)} = 1$, $y(0) = 1$.

(b) $y' + xy = x$, $y(0) = 0$.

(c) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 - 10x + 10$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

(6p)

Lösning. (a): Den här ekvationen är separabel, vi har ju

$$y' y^3 = \cos(x).$$

Integrerar vi det här med avseende på x får vi

$$\frac{y^4}{4} = \sin(x) + C.$$

för någon konstant C. Värdet av det bestämmer vi med hjälp av begynnelsevillkoret $y(0) = 1$

$$C + \sin(0) = \frac{y(0)^4}{4} \Rightarrow C = \frac{1}{4}.$$

Genom att lösa ut y får vi nu

$$y(x) = (1 + 4\sin(x))^{\frac{1}{4}}.$$

(b): Den integrerande faktorn för den här differentialekvationen är $e^{x^2/2}$. Multiplicerar vi ekvationen med den får vi

$$xe^{x^2/2} = (y' + xy)e^{x^2/2} = \frac{d}{dx}\left(ye^{x^2/2}\right).$$

Vi får

$$ye^{x^2/2} = \int xe^{x^2/2} = e^{x^2/2} + C,$$

där vi för att lösa den sista integralen utan att skriva ut det använde variabelbytet $t = \frac{x^2}{2}$. Värdet på C fås hur begynnelsevillkoret:

$$0 \cdot e^{0^2/2} = e^{0^2/2} + C \Rightarrow C = -1,$$

så att

$$y = e^{-x^2/2}(e^{x^2/2} - 1) = 1 - e^{-x^2/2}$$

(c): För att hitta en partikulärlösning ansätter vi ett andragradspolynom

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y_p' = 2Ax + B \Rightarrow y_p'' = 2A$$

y_p löser alltså differentialekvationen precis då

$$\begin{aligned} y_p'' - 5y_p' + 4y_p &= 2A - 5(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 4Ax^2 + (4B - 10A)x + (2A - 5B + 4C) \stackrel{!}{=} 4x^2 - 10x + 10 \end{aligned}$$

Här ser vi att $A = 1$, $B = 0$ och $C = 2$. Partikulärlösningen ges alltså av $y_p = x^2 + 2$.

I en tidigare version av lösningen angavs att partikulärlösningen var $y_p = x^2$. Detta var fel.

Nu hittar vi den homogena lösningen. Det karakteristiska polynomet är

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4,$$

vilket har nollställena

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2},$$

alltså

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1.$$

Den allmänna homogena lösningen ges alltså av

$$y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Lösningen ges alltså av $y = x^2 + C_1 e^{4x} + C_2 e^x$ för några värden av C_1, C_2. För att bestämma värdena för C_1, C_2 behöver vi nu lösa ekvationssystemet

$$\begin{gathered} y(0) = 0^2 + 2 + C_1 e^{-4\cdot 0} + C_2 e^{-0} = 2 + C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = 2 \cdot 04 \cdot C_1 e^{4\cdot 0} C_2 e^{-0} = 4 \cdot C_1 + C_2 = 0 \end{gathered}$$

Detta ger att $C_2 = -4C_1 \Rightarrow -3C_1 + 2 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = \frac{-8}{3}$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges alltså av

$$y = x^2 + 2 + \frac{2}{3} e^{4x} - \frac{8}{3} e^x.$$

$\square$

Uppgift 5

Betrakta funktionen

$$h : [0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-2x} - e^{-x}$$

1. Hitta och klassificera alla h:s stationära punkter.
2. Har h ett största värde? Har h ett minsta värde?

(7p)

Lösning. (a): Stationära punkter är per definition punkter x med $h'(x) = 0$. Vi räknar därför ut h':

$$h'(x) = -2e^{-2x} + e^{-x} = e^{-2x} \left(-2 + e^x\right).$$

Vi ser att $h'(x) = 0$ precis då $x = \ln(2)$. För att klassificiera punkten gör vi ett teckenstudium av derivatan

x		$\ln(2)$	
e^{-2x}	$+$	$+$	$+$
$(-2 + e^x)$	$-$	0	$+$
h'	$-$	0	$+$
h	$\searrow$	min	$\nearrow$

$x = \ln(2)$ är alltså en lokal minimipunkt.

(b): Ur teckenväxlingsschemat ser vi direkt att $x = \ln(2)$ även är ett globalt minimum. Vi ser också att $h(x) \leq h(0) = 0$ för alla $x \in [0, \ln(2)]$, och också, då funktionen är strängt växande på intervallet $[\ln(2), \infty[$

$$h(x) < \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-2t} - e^{-t} = 0, \quad x \in [\ln(2), \infty[.$$

Vi har alltså $h(x) \leq h(0)$ för alla x, och därför har h det största värdet $h(0) = 0$. $\square$

Uppgift 6

Konvergerar integralen

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx?$$

(6p)

Lösning. Det är möjligt att beräkna integralen exakt med hjälp av en partialbråksuppdelning. En enklare lösning är nog dock att observera att integranden beter sig som $\frac{1}{x^2}$ för stora värden på x. Formellt kan vi beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x+2}{x(x+1)^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3x+2)}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = 3 > 0.$$

Jämförelsesatsen för integraler på gränsvärdesform ger att integralen har samma konvergensbeteende som integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Eftersom den senare integralen konvergerar kan vi alltså konstantera att även I_1 konvergerar. □

Uppgift 7

Kan det existera en kontinuerlig funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ med

(i) $f(x)^2 > 0$ för alla $x \in [0,1]$

(ii) $f(0) = 1$ och $f(1) = -1$?

Ange en sådan funktion eller motivera varför den inte kan existera. (6p)

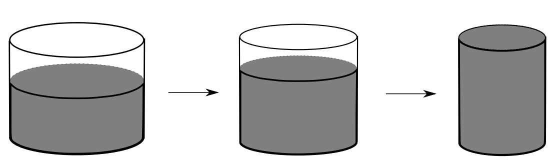
Lösning. Eftersom f är kontinuerlig implicerar satsen om mellanliggande värden att det för varje $c \in [-1,1]$ existerar ett $\xi \in [0,1]$ med $f(\xi) = c$. Om vi speciellt väljer $c = 0$ hittar vi alltså ett ξ med $f(\xi) = 0$. För detta ξ gäller då

$$f(\xi)^2 = 0^2 = 0 \not> 0.$$

Det kan alltså inte existera någon sådan funktion. □

Uppgift 8

En cylinderformad behållare med radien 1 längdenhet och höjden 1 längdenhet är fylld med $\pi/8$ volymenheter vatten. Behållaren dras nu åt så att radien minskar med en konstant hastighet av .1 längdenhet per sekund.



Radien minskar lika mycket överallt, så att cylinderformen bibehålls. Det går tillräckligt långsamt för att vattenytan hela tiden hålls plan. Speciellt hålls mängden vatten i behållaren konstant, fram tills att vattnet rinner över.

Med vilken hastighet stiger vattenytan i det ögonblick vattnet rinner över? (6p)

Lösning. Kalla vattenvolymen för V. Om vi kallar vattenytans höjd för h och behållarens rör för r har vi då

$$\frac{\pi}{8} = V = \pi r^2 h. \tag{1}$$

Deriverar vi detta samband (implicit) får vi

$$0 = \pi(2r(t)r'(t)h(t) + r(t)^2 h'(t)). \tag{2}$$

Det som söks är värdet på $h'(t)$ vid den tiden t det gäller att $h(t) = 1$ (det är ju då vattenytans höjd blir lika med behållarens höjd). Vi löser ut värdet på radien vid denna tid ur (1)

$$\frac{\pi}{8} = \pi r^2(t)h(t) = \pi r^2(t) \cdot 1 \implies r(t) = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Vi sätter nu in värdena på $h(t)$, $r(t)$ samt $r'(t) = -0.1$ (det sista får vi ur uppgiftstexten) i (2):

$$0 = \pi \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot (-0.1) \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot h'(t) \right).$$

Vi kan nu lösa ut

$$h'(t) = \frac{2 \cdot 8}{\sqrt{8}} \cdot 0.1 = \frac{2\sqrt{8}}{10}.$$

$\square$