

Integration

Denna datorövning syftar till att illustrera approximativ integration med hjälp av Riemannsummor. Vi betraktar den bestämda integralen

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

och dess approximation med en generaliserad Riemannsumma

$$I \approx R(f, P, c) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (2)$$

där $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ med $x_0 = a$ och $x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, och där $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$. Olika val av punkterna c_i kommer uppenbarligen att ge olika approximativa värden på I .

För enkelhets skull studerar vi bara fallet med *lika delning*, dvs. då $\Delta x_i = \Delta x = (b - a)/n$. Vi ska också begränsa oss till att endast betrakta fallen $c_i = x_{i-1}$, $c_i = x_i$ samt den så kallade *mittpunktsmetoden* där $c_i = (x_{i-1} + x_i)/2$.

Konvergens

Man kan visa att om $f(x)$ är tillräckligt många gånger deriverbar så konvergerar Riemannsumman mot I med fel $|I - R(f, P)| \leq C \Delta x$, där C är en konstant oberoende av Δx , *utom* i mittpunktsfallet, då $|I - R(f, P)| \leq C(\Delta x)^2$. Beviset bygger på Taylorserieutveckling av $f(x)$,

$$f(x) = f(c_i) + (x - c_i)f'(c_i) + \frac{(x - c_i)^2}{2}f''(\xi).$$

Alltså är

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \Delta x f(c_i) + \frac{1}{2} ((x_i - c_i)^2 - (x_{i-1} - c_i)^2) f'(c_i) \\ &\quad + \frac{1}{6} ((x_i - c_i)^3 - (x_{i-1} - c_i)^3) f''(\xi) \end{aligned}$$

Vi ser att om $c_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ så faller den andra termen på högersidan bort och

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \Delta x f(c_i) + O(\Delta x)^3,$$

medan i alla andra fall

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \Delta x f(c_i) + O(\Delta x)^2,$$

I varje delintervall görs alltså ett fel, och vi har $n = (b - a)/\Delta x$ delintervall. Felen summeras därför $O(\Delta x^{-1})$ gånger och det totala felet blir

$$|I - R(f, P)| = n \times O(\Delta x^p) = O(\Delta x^{p-1})$$

där $p - 1 = 2$ för mittpunktsmetoden och $p - 1 = 1$ i andra fall.

Implementering i MATLAB

Övning 1. Skriv en funktionsfil `riemann.m` med anropet `value=riemann(f,I,n,type)` som approximativt beräknar integralen (1). Du skall använda programskalet [riemann.m](#) ([svar](#)) . In- och ut-variablerna förklaras i programskalet.

Testa programmet på integralen

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$

Gör också ett huvudprogram som anropar `riemann` med antal intervall lika med 10 och 100. Enligt teorin skall felet i det senare fallet vara en faktor 100 mindre än i det tidigare för mittpunktsmetoden och en faktor 10 i de övriga fallen. Stämmer det?

2009-10-21 /peter