

ÖVNINGSUPPGIFTER KAPITEL 7

Ö7.1. Bestäm centroiden.

- (a) Området i planet som begränsas av $y = 1 - x^2$ och $y = 0$.
- (b) Ett område som begränsas av $f(x) = \cos(x)$, x -axeln, $x = 0$ och $x = \frac{\pi}{2}$.
- (c) Området i planet som begränsas av $y = \sqrt{1 - x^2}$ och $y = 0$.
- (d) Området i planet som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 3 - 2x$ och $y = 0$.

Ö7.2. Bestäm tyngdpunkten.

- (a) En formation av sex identiska flygplan, som var och en har sin tyngdpunkt i punkterna $(-2, 0)$, $(-1, 2)$, $(0, -1)$, $(0, 4)$, $(1, 2)$ respektive $(2, 0)$.
- (b) Området i planet som begränsas av x -axeln, y -axeln och funktionen $f(x) = 1 - x$ vars densiteten varierar som $\rho(x) = 1 + x$.
- (c) En triangel med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$ vars densitet varierar som $\rho(x) = 1 + x$.
- (d) Område i planet som begränsas av linjerna $y = 1 - x$, $x = 0$ och $y = 0$ vars densitet varierar som $\rho(x) = 1 + x$.

Uppgift 7.3. Bestäm volymen av kroppen som uppkommer då ett givet område roterar runt y -axeln.

- (a) En kvadrat med hörn i punkterna $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ och $(3, 1)$.
- (b) En cirkel med centrum i $(2, 2)$ och radie 1.
- (c) En triangel med hörn i $(1, 0)$, $(2, 0)$ och $(1, 1)$.
- (d) Området som begränsas av funktionen $f(x) = 1 - (x - 2)^2$ och x -axeln.

Facit

Ö7.1. (a) Symmetri ger $\bar{x} = 0$. $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 1-2x^2+x^4 dx = 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ och $m = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3}$ varför $\bar{y} = \frac{2}{5}$.

(b) Areal är $m = \int_0^{\pi/2} \cos dx = 1$. Momenten ges av $M_{x=0} = \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx = [x \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = \pi/2 - 1$ och $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x)) dx = \frac{\pi}{8}$. Därför får vi $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8})$.

(c) x komponenten blir 0 på grund av symmetri. Areal ges av $\pi/2$. Momentet i y -les $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1-x^2 dx = \frac{2}{3}$. Centroiden ges av $(x_p, y_p) = (0, \frac{4}{3\pi})$.

(d) Området är en triangel med hörn i $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(\frac{3}{2}, 0)$. Centroiden ges då av $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{0+1+1.5}{3}, \frac{0+1+0}{3}) = (\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$.

Ö7.2. (a) Symmetri ger $\bar{x} = 0$. Låt massan vara m . Momentet kring $y = 0$ ges av $M_{y=0} = m(0 + 2 - 1 + 4 + 2 + 0) = 7m$. Den totala massan ges av $6m$. Därför får vi $\bar{y} = \frac{7}{6}$.

(b) Massan är $m = \int_0^1 (1-x)(1+x) dx = \frac{2}{3}$. Momenten ges av $M_{x=0} = \int_0^1 x(1-x)(1+x) dx = \frac{1}{4}$ och $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x)(1-x)^2 dx = \frac{5}{24}$. Därför får vi $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{16})$.

(c) Massan ges av $m = \int_0^1 (1+x)(1-x) dx = \frac{2}{3}$. Momentet runt x -axeln ges av, $M_{x=0} = \int_0^1 (1+x)x(1-x) dx = \frac{1}{4}$, och $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x)(1-x)^2 dx = \frac{5}{24}$. Detta ger $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{16})$.

(d) Vi har $m = \int_0^1 (1-x)(1+x) dx = \frac{2}{3}$, $M_{x=0} = \int_0^1 x(1-x)(1+x) dx = \frac{1}{4}$ och $M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x)(1-x)^2 dx = \frac{5}{24}$ vilket ger $\bar{x} = \frac{3}{8}$ och $\bar{y} = \frac{5}{16}$.

Ö7.3. (a) Areal är 2 centroiden $(2, 1)$ och dess minsta avstånd till y -axeln 2. Pappus-Guldins regel ger $V = 8\pi$.

(b) Areal är π och centroidens avstånd är 2. Volymen ges av $V = 4\pi^2$.

(c) Centroidens avstånd är $4/3$ och triangelns area $1/2$. Volymen blir $4\pi/3$.

(d) Areal blir $4/3$, centroidens avstånd till y -axeln 2 så volymen blir $16\pi/3$.