

Analys i en variabel, TMV138/181
Läsperiod 2, hösten 2019

Exempel på tentamensuppgifter från avsnittet om integraler

Uppgift 1 – 9: beräkna integralerna.

1. $\int \sin^2 x \, dx$

2. $\int_1^9 \frac{\sqrt{u}-2u^2}{u} \, du$

3. $\int_0^3 |x^2 - 4| \, dx$

4. $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx$

5. $\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}$

6. $\int_0^1 x^2 \cos(x^3) \, dx$

7. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$

8. $\int_0^\pi [2 \sin x] \, dx$ ($[x]$ betecknar heltalsdelen av x)

9. $\int_{-1}^1 |3^x - 2^x| \, dx$

10. Bestäm arean av det begränsade området mellan kurvorna
 $y = \cos \pi x$ och $y = 4x^2 - 1$

11. Beräkna volymen av följande figur: basen är en triangel med hörn i punkterna (0,0), (1,0) och (0,1). Tvärsnitt i rät vinkel mot y-axeln är liksidiga trianglar.

12. Området som begränsas av kurvorna $y = x^3$, $y = 1$ samt $x = 2$ roterar kring linjen $y + 3 = 0$. Beräkna rotationsvolymen.

13. Bestäm talen a och b så att integralen $\int_a^b -6 + 5x - x^2 \, dx$ blir så stor som möjligt.

14. Visa att $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} > \frac{33}{68}$ genom att till exempel visa att kurvan $y = \frac{1}{1+x^4}$ är konkav på det givna intervallet.

15. Visa att $\int_0^1 e^{-x^2} dx > 1 - \frac{1}{e}$

VÄND!

Teorifrågor

16. Avgör för vilka positiva tal p som integralen $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ är konvergent.

Ledning: imitera beviset om konvergens för $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$

17. Formulera analysens huvudsats.

Låt $f(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi t}{3-t^2} dt$, $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$

I vilken punkt antar $f(x)$ sitt största värde? Vad kan man säga om minsta värde?

18. Ställ upp en Riemannsumma för integralen $\int_0^2 x dx$ och beräkna integralen genom att låta antalet delintervall gå mot ∞

19. För polynomet $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ gäller att $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$

Visa att det finns ett tal s , $0 < s < 1$, sådant att $p(s) = 0$.

20. Formulera integralkalkylens medelvärdessats.

Beräkna sedan gränsvärdet $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3} dt$