

**Svar och (ibland) ofullständiga lösningar till TENTAMEN I ANALYS FÖR Z OCH TD1, TMV138/181
CHALMERS**

Onsdag 15 januari 2019 kl 8.30 – 12.30

1.

Svar:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = [-\arctan(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

b. $\int_0^2 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx = 1 - \frac{3}{e^2}$

c. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = (x = t^2) = \int \frac{2t dt}{1+t} = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

2.

a. Avgör om serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!}$ är konvergent.

Svar: ja, den är konvergent enligt kvotkriteriet.

b. summan av serien: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{9^{n-1}} = \frac{9e^2}{9-e^2}$

3. Lös differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$ med
begynnelsevillkor $y(0) = y'(0) = 0$

Lösning:

Homogenlösning: $y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

Partikulärlösning: (ansätt $y_p = ae^{-2x}$) $y_p = -xe^{-2x}$

Svar: $y = e^{-x} - (1+x)e^{-2x}$

4. Bestäm alla x för vilka potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$ är konvergent.

Lösning:

Konvergensraden blir $R = \frac{1}{2}$

För $x = 0$ blir serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som är divergent.

För $x = -1$ blir serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ som är konvergent.

Svar: serien konvergerar för $-1 \leq x < 0$

5. Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} \frac{3x+4}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx$

Lösning: genom att ansätta partialbråk får vi $\frac{3x+4}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2-x}{x^2+2x+2}$

$$\begin{aligned} \text{Alltså: } \int_0^{\infty} \frac{3x+4}{(x+1)(x^2+2x+2)} dx &= \left[\ln(x+1) + 3\arctan(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) \right]_0^{\infty} = \\ &= \left[3\arctan(x+1) + \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \right]_0^{\infty} = \frac{3\pi + \ln 4}{4} \end{aligned}$$

6. Låt $f(x) = (\sin x^2) \cdot (\cos 2x) \cdot (e^{3x})$ och använd Maclaurinutvecklingar för att bestämma $f^{(IV)}(0)$ (fjärdederivatans i $x = 0$)

Lösning: Genom att utveckla de tre faktorerna var för sig får vi

$$f(x) = (x^2 + O(x^6))(1 - 2x^2 + O(x^4))\left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + O(x^3)\right) = x^2 + 3x^3 + \frac{5}{2}x^4 + O(x^5)$$

$$\text{Alltså är } f^{(IV)}(0) = \frac{5}{2}4! = 60$$

7. Bestäm volymen som uppstår då området innanför triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(0,1)$ samt $(2,2)$ roterar kring linjen $y = 2$

$$\text{Lösning: volymen blir } \pi \int_0^2 (2-x)^2 - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = 2\pi$$

8.

- a. Avgör om serien $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ är **betingat** konvergent.

Notera att en betingat konvergent serie **inte** är absolutkonvergent.

Ledning: integralkriteriet kan vara användbart.

Lösning: ja, serien är betingat konvergent. Den är alternerande, termerna är avtagande och går mot 0. Den är inte absolutkonvergent eftersom $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ är divergent.

- b. Antag att $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ är en betingat konvergent serie.

Vad kan man säga om serien $\sum_{n=2}^{\infty} n a_n$?

Är den säkert betingat konvergent?

Är den säkert divergent?

Lösning: Exemplet i a. visar att $\sum_2^{\infty} n a_n$ kan vara betingat konvergent eftersom $n a_n$ då blir $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ Exemplet $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ visar att $\sum_2^{\infty} n a_n$ kan vara divergent.

- c. Samma fråga som i b. för serien $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n$

Lösning: Antag att $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n$ är konvergent. Då måste $|n^2 a_n| \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ så $|a_n| < \frac{1}{n^2}$ för tillräckligt stora n . I så fall är $\sum_2^{\infty} a_n$ absolutkonvergent.

Slutsats: $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n$ är säkert divergent.