

Lärande mål LM1 - kunna definiera och manipulera elementära funktioner och algebraiska uttryck; LM2 - förklara begreppen derivata; LM3 – förklara begreppen integral; LM4 – förklara kopplingen mellan derivata och integral; LM5 – kunna lösa enklare differentialekvationer; LM6 – approximera funktioner med polynom samt framställa dem som potensserier; LM7 – kombinera kunskaper om olika begrepp i praktisk problemlösning	Innehåll (olika moduler) M1 - elementära funktioner; M2 – gränsvärdesbegeppet; M3- kontinuitet för reella funktioner; M4 - deriverbarhet för reella funktioner; M5 – medelvärdessatsen; M6 - Taylorutvecklingar och approximationer av funktioner; M7 – Riemannintegralen; M8 - primitiva funktioner och kopplingen till integraler; M9 - tillämpningar av intregalberäkningar på volymer av kroppar och längden av kurvor; M10 - enklare differentialekvationer; M11 komplexa tal
---	---

W1: dugga 1 grunder (1p, avrundning med G/U)	W2: dugga 2a/b gränsvärden/kontinuitet (0.75/0.25p, avrundning med G/U)	W3: dugga 3 – derivata (1p max)	W4: dugga 4 (0.5p max) – derivata tillämpningen
L1 bakgrund/mängder - mängder (objekt som delar egenskaper: OO class) - mängder av tal - reella talen ... decimal form med/utan upprepning ... med icke upprepning - egenskaper av tal: algebra, varför är (-1)(-1)=1?, kvadreringsregeln, konjugatregeln	L1 gränsvärdet: grunder • höger, vänster, tvåsidig, ändlig, oändlig • inre punkten, kant punkter • egenskaper och relationen till de reella talen - $\lim (f+g)=\lim f + \lim g$ - $\lim (f/g)=\lim f/\lim g$ - $\lim (f^g)= (\lim f)^{\lim g}$ RÖ1 gränsvärden	L1 tekniker att hitta derivata • differentialkalkyl - skillnaden mellan Δx och dx, mellan Δf och df - $df = f'(x)dx$ - ”algebra” med förnedringar df - $d(x^2+x^3)=2xdx+3x^2dx$, $da+da^2=da$, $da+da db=da$ etc • derivata regler - summa $d(f + g) = df + dg$ - produkt $d(fg) = df g + f dg$ - kvot $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df g - f dg}{g^2}$ - kedjeregeln: derivatan av sammansatta funktioner $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$ • kedjeregeln i differential notation: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$ • kedjeregeln användningsexempel: - $(1 + x)^{10}$, $(1 + x^2)^{10}$, ... • viktiga satser: medelvärdessats RÖ1 kedjeregeln och implicit derivata övningar • ADAMS kedjeregeln övningar • ADAMS medelvärdesatsen L2 tillämpningar av kedjeregeln och implicit derivata • derivata av implicita funktioner: $F(y,x)=0 \rightarrow y=f(x)$ • vanliga implicita funktioner: $f(x)^2 = x$, $f(x)^n = x$, $\sin f(x) = x$ • derivatan av inversfunktioner - principer: $f(f^{-1}(x)) = x$ - hur man använder regeln $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$ • tillämpningar: räkna derivatan av $x^{1/n}$, $\sqrt{x}$, $x^{m/n}$ RÖ2 kedjeregeln och implicit derivata övningar • ADAMS 2.9 implicit derivata övningar • tangenter/normaler med implicita funktioner • analys av aktuella komplicerade tenta frågor L3 derivata av komplicerade funktioner: trigonometriska funktioner • derivata bevis för $\sin'(x)=\cos(x)$ • derivata av $\cos(x)$ från derivata av $\sin(x)$: kedjeregeln • derivata för $\cos(x)$ med implicit derivata: $\sin^2x + y^2=1$ och $y=\cos(x)$ • derivata av $\tan(x)$, $\cot(x)$ • derivata av $\arcsin(x)$ med implicit derivata: $\sin y=x$ och $y=\arcsin(x)$	L1 derivata av komplicerade funktioner: exp och log • a^x och $\log_a x$ - definition - egenskaper • derivata bevis för e^x • derivata av a^x • derivata av $\ln x$ • derivata av $\log_a(x)$ RÖ1 komplicerade derivata med varierade tekniker - $x^{g(x)}$ derivata - derivera (MVG): $-\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{x+2}{x\sqrt{3}})$, $x^{\arctan x}$, $\frac{2}{3} \arctan(\frac{1}{3} \tan \frac{x}{2})$ L2 komplicerade limes med ln x, exp x, och polynomer - limes fal genomgång - L'Hopital genomgång RÖ2 komplicerade limes som går inte att räkna utan derivata • komplicerade limes (exp mot polynom, log mot polynom,...) • L'Hopital övning komplicerade limes; beräkna limes (om det finns, MVG, vem tävlar med vem?): $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin x + x}{x \arctan x}$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{2 + \ln x}$ L3 Approximationer med polynom (rena Taylor) • exempel av linjär approximation - fel analys - kan man göra bättre? • Ja: Taylor utveckling • att approximera funktioner med polynomer • Stora O notationen
L2 bakgrund/funktioner - enkla olikheter: det går att ordna alla tal i R ,tal linje - att arbeta med olikheter - mängder i R: enkla intervaller - mängder i RxR ... Kartesiskt koordinatsystem ... enklare former i RxR (linjer, cirklar, diskar, halvytor, kombinationer av dessa) - funktioner och deras grafer: linjer, parabola, 1/x, x - operationer med funktioner f+g, f*g, f/g - exempel på olika funktioner ... polynomer (operationer, noll-punkter) ... trigonometriska funktioner (definition, grafer, värden för speciella vinklar, periodicitet egenskaper, symmetri egenskaper, sin(a+b), cos(a+b))	L2 gränsvärdet tillämpningar: kontinuitet • definitionen och betydelsen - tvåsidig - vänster - höger - för inre punk - för kant punkter - över en intervall - över domän • exempel 1/x: - icke kontinuerlig i R - kontinuerlig i R\{0} • enkla grafiska exempel • tekniker att konstruera kontinuerliga funktioner RÖ2 kontinuitet		
L3 bakgrund/funktioner - funktioner: sammansatta funktioner - inversfunktionen: ”branches”, grafen - speciella inversfunktioner: arcTRIG - komplexa tal: definitionen, operationer, polärformen, konjugat, Re/Im funktioner, avstånd från origo	L3 derivata grunder • bilen som spårar ur - hitta tangenten till f(x)=x² i x=1, $y = kx + c$ - gissa k för x=0, +/- för andra x - tabellen $\Delta f / \Delta x$ - räkna gränsvärdet när: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$ • olika definitioner av derivata $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{w \rightarrow x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$ • räkna enkla derivata från definitionen - f(x)=1, x, x², xⁿ, $\sqrt{x}$ • den grafiska meningen: tangenten till f(x) in en punk • linjär approximation i en punk: $f(x) \approx kx + c$ • höger/vänster derivata • derivata i kantpunkt vs inrepunkt		

W5 skulder, derivata diskussion, analysera grafer, Riemann integral	W6: dugga 5 (1p max) - integraler	W7: dugga 6 (0.5p max) – komplexa tal	W8 sammanfattning
L1 approximationer med potensserier (potens x Taylor) - principer för att approximera i form $f(x) \approx x^\alpha(a_0 + a_1x + \dots)$ - återkoppling till gränsvärden som vi räknade tidigare: varför $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - x)$ finns - Taylor utveckling i $x = \infty$ är samma som Taylor utveckling i $\frac{1}{x} = 0$ RÖ1 approximationer - derivata dilemman, approximationer: kring ändligt x, oändligt x, återkoppling till gränsvärdena, återkoppling till L'Hopital L2 ytterligare derivata tillämpningar - numerisk lösning av ekvationer (Newton-Raphson) - at rita och analysera grafer med hjälp av derivata - sneda asymptoter - speciella punkter (KP, RP, SP) - optimerings kriterier ($f'=0$, $f''>0$ eller $f''<0$) - från graf till derivata och tillbaka - deriverbar i hela intervallet utom i en punkt - samma idéer som i situationen: f kontinuerlig i hela intervallet utom i en punk, går det att fixa? - ex: justera parametrar så att funktionen blir deriverbar i ett intervall, punkt, etc. - procent ändringar, "känslighets analys" RÖ2 rita grafer - Asymptoter (H, V, sned), kritiska punkter, singulära punkter, extrema värden, optimering: $f''(x)$ test L3 Riemann integral idén - definition som ytan under grafen - exempel: ytan under en linjär funktion; vad händer när man förfinar partitionen - olika sätta att approximera integralen: L, U, och R summor och deras relation - satsen: om $L=U \Rightarrow R$ finns, och tvärtom - villkor för att integralen finns - Problem med Taylor utveckling och hur man kan fixa det med interpolation: approximera funktion om $f(x_i)$ är känd för några punkter, tex. för $i=1,2,3$ men inte derivata; gäller analys principer då?	L1 integrations tekniker - analytiskt angrepps sätt: analysens huvudsats (relation mellan integral och primitiv funktion) - tekniker för att hitta den primitiva funktionen: - gissa - om man kan gissa en del av integralen använd partiell integration - substitutionstekniker - numeriskt angrepps sätt: - trapezregel - Simpson regel - vad betyder "kvadratur" - feluppskattning: vad betyder $O(h)$ eller $O(h^2)$? RÖ1 integrations tekniker (obestämda integraler) $\int P_n(x)dx$ - partiellintegration - enkel variabel substitution $\int P_n(x)/Q_m(x)dx$ L2 Tillämpningar av integraler: längder av kurvor i 2D, ytor i 2D - längder av kurvor i 2D - Principer: hur räknar man dl? - Exempel: en kvart av en cirkel med radie r - ytor i 2D med gränser som beskrivs av funktioner - Centrum av massan i 2D RÖ2 Tillämpningar av integraler - ytor, volymer, längder, centrum av massan L3 Tillämpningar av integraler: ytor och volymer i 3D som definieras med roterande funktioner - ytor som definieras av roterande funktioner - Principer: hur räknar man dS? Dela i små ytor och integrera - lära sig förkasta oviktiga termer: hur vi vet att vi kan byta $f(x+dx)dh$ mot $f(x)dh$ - hur man använder "receptet" - Exempel: cylinder, kon, paraboloid - volymer som definieras av roterande funktioner - Principer: hur räknar man dV? - Exempel: kon, paraboloid, cylinder	L1 enkla differentiella ekvationer - linjära differentiella ekvationer - koefficientfunktionerna: $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$: $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$ - homogen/icke homogen diff ekvation - tekniker - andra grad med konstanta koefficienter - tillämpningar till mekaniken: tolkningen av randvillkor - mallen $y = e^{\lambda x}$ och den karakteristiska ekvationen (polynomet) med reella lösningar λ_1 och λ_2 (komplexa lösningar analyseras under L2) RÖ2 diverse övningar - integraler - enkla differentiella ekvationer L2 Komplexa tal och tillämpningar - grunder: - definition: $z=x+iy$ - algebra: z_1z_2, z_1/z_2 - tekniker: Re, Im, z och z^*, $z ^2 = z z^*$ - Euler formeln "bevis": $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ - polär form av det komplexa talet: $z = r e^{i\varphi}$ - samband mellan trigonometriska och hyperboliska funktioner: $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ - algebraiska ekvationer med komplexa tal: hitta högre rötter, hitta andra roten, omvandla mellan $x+iy$ och den polära formen $(4 - 3i)z^2 - 25z + 31 - 17i = 0$ $z^2 - 2\sqrt{2}iz - 2\sqrt{3}i = 0$ $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$ RÖ2 Övnings tenta: 2x45 minuter Vi tränar för den riktiga tentan. Liknande problem, med det enda skillnaden att här man kan fråga sin granne för hjälp eller läraren, plus att man kan ha allt man vil ha. L3 tentamen genomgång - exempel av rättade tentamen visas "positiva" exempel diskuteras "negativa" exempel diskuteras	L1 sammantagning - kan det finnas en funktion som är definierat för alla R men inte kontinuerlig någonstans? - kan det finnas en funktion som är bara kontinuerlig i en punkt? - är en funktion som är kontinuerlig i a deriverbar i a? - är en funktion som är deriverbar i a kontinuerlig i a? - måste en funktion som är kontinuerlig i a vara kontinuerlig i ett litet intervall kring a? - måste en funktion som är kontinuerlig i a vara deriverbar i ett litet intervall kring a? - Kan det finnas en funktion som är kontinuerlig överallt men inte deriverbar någonstans? - möjliga tillämpnings scenario för framtiden - återkoppling till lärandemål