

1 Föreläsning 1

1.1 Linjärt ekvationssystem

Ex 1.1 Ett linjärt ekvationssystem (ES) ex.vis

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Vi skall tillåta oss ett antal *operationer* för att lösa ett ES.

Lösning:

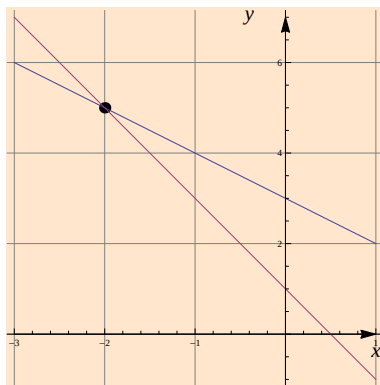
Först operation E2, radbyte och sedan operation E2, multiplikation av första ekvation som sedan adderas till andra ekvation.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 \cdot (-2) \\ 2x + y - 2x - 2y = 1 - 5 \end{cases}$$

Och nu multiplikation av andra ekvation med ett tal $\neq 0$, operation E3, närmare bestämt -1 , som ger

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 \\ (y = 5) \cdot (-1) \uparrow \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Dessa tre operationerna räcker för att lösa alla typer av ES. Metoden kallas *Eliminationsmetoden*.



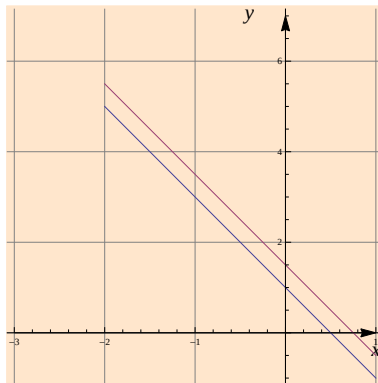
Lösningens koordinater $(x, y) = (-2, 5)$ är koordinaterna för skärningspunkten mellan de två linjerna.

Ex 1.2 Lös ES...

Lösning:

$$\begin{cases} (2x + y = 1) \cdot (-2) \downarrow \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Den sista ekvationen är $0 = 1$, en orimlighet. Detta betyder att ES saknar lösning, alternativt att antal lösningar är 0.



*Linjerna är parallella och icke-sammanfallande. Lösning saknas eller det finns **noll** lösningar.*

Ex 1.3 Lös ES...

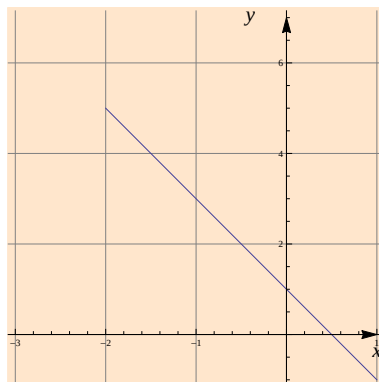
Lösning:

$$\begin{cases} (2x + y = 1) \cdot (-2) \downarrow \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Den sista ekvationen är $0 = 0$, är sann för alla (x, y) och ger ingen information. Således är

$$\begin{cases} (2x + y = 1) \cdot (-2) \downarrow \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \iff 2x + y = 1$$

en ekvation med oändligt många lösningar. Svar: x, y som uppfyller detta ES ges av $\{(x, y); y = 1 - 2x, x \in \mathbb{R}\}$.



Linjerna är parallella och **sammanfallande**. Det finns ∞ med lösningar.

- Det som dessa exempel är typiskt för ES i allmänhet. Antal lösningar är 1, 0 eller ∞ .

1.2 ES på matrisform

Vi rationaliserar skrivandet av ett ES och skriver exemplena ovan med matris. I det första exemplet skriver vi upp det nödvändigaste. Vi ersätter E1-E3 med R1-R3, s.k. radoperationer med väsentligen samma betydelse.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right] &\sim \{\text{R2}\} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \{\text{R1}\} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \{\text{R3}\} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \cdot (-1) \uparrow \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ex 1.4 Lös ES

$$\begin{cases} x - y + 2z &= -1 \\ 3x + z &= 1 \\ x + y - z &= 2 \end{cases}$$

Lösning:

På matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] (*) \sim \{\text{med samma typ av operationer}\} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] (**)$$

Från (**) går vi vidare till

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] (***)$$

Kommentarer

- Lösningen är $(x, y, z) = (0, 3, 1)$.
 - (*) Det första elementet, räknat från vänster i en rad som är $\neq 0$, kallas *pivotelement*. Dessa är 1, 3 och 1.
 - (**) I denna är pivotelementen också 1, 3 och 1. Pivotelementet i raden ovan står t.v. om pivotelementet i raden under. Eventuella rader med enbart 0 som element kallas en *nollrad*. Dessa skall stå nederst. En sådan matris har trappstegsform (echelon form).
 - (***) Denna matris är också på trappstegsform. Dessutom är alla tre pivotelement = 1 och alla andra element i samma kolonn, som har pivotelement, är = 0. Matrisen är då på *radreducerad form* (Row reduced echelon form).
-

- Betrakta matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

1. Matrisen har tre rader (den första är $[1 \ -1 \ 2|-1]$) och fyra kolonner

(den första är $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$).

2. Matrisen är av typ 3×4 .

3. Matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ är av typ 3×3 eller ordning 3. Den är kvadratisk.

4. Den första matrisen är totalmatris (augmented matrix) för ES och den andra är motsvarande koefficientmatris.

5. Elementet **3** är i position $(2, 1)$ (rad 2 och kolonn 1).

6. Att

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

läses att vänster matris är *radekvivalent* med höger matris.

Sats 1.1 Varje matris är radekvivalent med en matris på trappstegsform och t.o.m. med en matris på radreducerad form.

Förutom de införda begreppen ovan definierar vi *rang*.

Definition 1.1 Givet en matris $\mathbf{A}$ och en radekvivalent matris $\mathbf{A}'$ på trappstegsform, d.v.s. $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$. Antal pivotelement i $\mathbf{A}'$ kallas rangen för $\mathbf{A}$ och skrivs $\text{rang } \mathbf{A}$.

Kommentarer

Ex 1.1 Vi sätter koefficientmatrisen till $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och totalmatrisen till

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \text{ I ex 1.1 ser vi att}$$

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \mathbf{A}|\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

Observera att $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2 = \text{antal variabler}$.
Antal lösningar är 1.

Ex 1.2 Här är $\text{rang } \mathbf{A} = 1 < \text{rang } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2$.
Antal lösningar är 0.

Ex 1.3 Här är $\text{rang } \mathbf{A} = 1 = \text{rang } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 1 < \text{antal variabler}$.
Antal lösningar är ∞ .

- I ex 1.1 är rangen för koefficientmatrisen lika med antal pivotelement i motsvarande matris på trappstegsform. Man säger att en variabel som motsvarar ett pivotelement i en matris på trappstegsform är *bunden*.
- I ex. 1.3 har vi $\mathbf{A}|\mathbf{B} \sim [2 \ 1|1]$. Här är 2 pivotelement, x bunden variabel och y fri variabel.

1.2.1 Samband, rang och antal lösningar på ett ES

	Antal lösningar
rang koeff. matris = rang totalmatris = antal variabler	1
rang koeff. matris = rang totalmatris < antal variabler	∞
rang koeff. matris > rang totalmatris	0

Ex 1.5 Lös ES på matrisform. Variabler är x, y, z .

Lösning:

Vi förväntar oss 1, 0 eller ∞ många lösningar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right].$$

Detta betyder att $(x, y, z) = (4, 6, 5)$.

Kommentarer

Vi ser hur sambanden vi redan kommit fram till även stämmer på detta exempel.

- rang $\mathbf{A} = \text{rang } \mathbf{A}|\mathbf{B} = 3 = \text{antal variabler}$. Alltså 1 lösning.

Ex 1.6 Lös ES på matrisform. Variabler är x, y, z .

Lösning:

Vi förväntar oss 1, 0 eller ∞ många lösningar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & -4 \end{array} \right].$$

Observera att den sista totalmatrisen är på reducerad form. Rang för koefficient- och totalmatris är $2 < \text{antal variabler}$. Alltså ∞ med lösningar. Det finns två bundna variabler, x och y och en fri z . De bundna variablerna motsvarar pivotelementen. Att det finns en (eller flera) fri variabel, betyder att det finns ∞ med lösningar. Vi kan uttrycka lösningarna i den fria variabeln.

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 4 \\ z = t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Kommentarer

- t , som motsvarar den fria variabeln, kallas *parameter*.
- Med fler variabler än ekvationer (villkor) kallas ES för *underbestämt*.

Ex 1.7 Lös ES

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2y = 9 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Lösning:

Detta är ett överbestämt ES. Sådana brukar sakna lösningar. På matrisform blir det

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 6 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vi ser att $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2 = \text{antal variabler}$. Alltså en lösning som ju är $(x, y) = (7, 1)$.

Kommentarer

- Speciellt ser vi att vi får en nollrad i både koefficient- och totalmatrisen.

1.2.2 Grafisk tolkning av ES och lösningarna

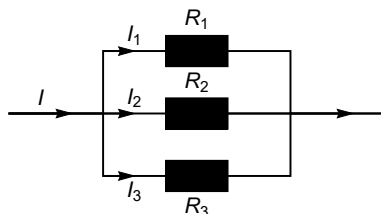
I de fall där vi har två variabler, som i de sista exemplet, kan vi tolka ekvationerna grafiskt som linjer i planet ($\mathbb{R}^2$):

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2y = 9 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Lösningen i detta exempel är $(x_0, y_0) = (7, 1)$, som är gemensam skärningspunkt för de tre linjerna. Oftast är det noll lösningar på ett överbestämt ES: Tre eller fler linjer brukar inte skära varandra i en punkt.

1.3 Ett exempel ellära

Ex 1.8



För en strömkrets gäller följande ekvationer:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 &= R_2 I_2 \\ R_2 I_2 &= R_3 I_3 \\ I_1 + I_2 + I_3 &= I \end{aligned}$$

med strömmarna I_k , $k = 1, 2, 3$ som variabler. ES kan skrivas på matrisform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} R_1 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & I \end{array} \right] \text{ med lösningar } \begin{cases} I_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3} I \\ I_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3} I \\ I_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3} I \end{cases}$$

Kommentarer

- Speciellt har detta ES en entydig lösning och den kvadratiske koefficientmatrisen har rangen 3.
- Med ett program som kan lösa detta ES exakt får man inga avrundningsfel i mellanled. Man behöver inte ge svaret exakt utan endast ge ett (således korrekt) avrundat svar:
- I själva verket är de ingående värdena, oftast, numeriska värden, d.v.s. givna som decimaltal. Då ger ett matematiskt program direkt en numerisk lösning.

Ex 1.9 Givet ett ES i ex 1.1 med koefficientmatrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och totalmatrisen till $\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$. Vi har en lösning. Det är det naturliga

när man har lika många ekvationer som variabler.

I ex1.2 har vi koefficientmatris och HL

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ respektive } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi ser att raderna i koefficientmatrisen $\mathbf{A}$ är proportionella, mer exakt så är

$$2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0.$$

Vi observerar att i ex 1.3 är koefficientmatrisen densamma och där finns ∞ med lösningar. Till sist i ex 1.1 är motsvarande beräkning $2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

Definition 1.2 *Determinanten* av en matris

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

av ordning 2 är

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = ad - bc.$$

1.4 Antal lösningar och determinant

Vi ugrå från ett ES medlen kvadratiske koefficientmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$