

1 Föreläsning III

1.1 Invers matris

Vi känner till vad som är en "etta", som matris. Den finns av olika ordningar. Av ordning n skrivs den $\mathbf{I}_n$ eller bara $\mathbf{I}$. Elementet i $\mathbf{I}_n$ i position j, k för $j \neq k$ är 0 och för element i position (j, j) är 1, alltså ettor i huvuddiagonalen och i övrigt nollor.

Ex 3.1 I exempel 1.1 har vi koefficientmatrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. I samma exempel har vi entydig lösning på tillhörande ES. Vi ser också att rang $\mathbf{A} = 2$ emedan rangen i exempel 1.2 och 1.3 för koefficientmatrisen är 1.

Invers och en lösning Antag att typ $\mathbf{X} = 2 \times 1$. Tydligen gäller att om koefficientmatrisen är kvadratisk, så finns inversa matrisen omm

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (1)$$

har entydig lösning $\mathbf{X}$.

- För att komma åt invers matris löser vi ett ES på matrisform och förutsätter att inversa matrisen till $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ existerar och löser det ES som motsvarar (1). På matrisform med $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, där vi förutsätter att $a \neq 0$. Formellt, om $\mathbf{A}^{-1}$ existerar, får vi lösningen så här:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \iff \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \iff \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}. (*)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & h_1 \\ c & d & h_2 \end{array} \right] \sim \begin{array}{c} (-c) \cdot \\ \downarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} a & b & h_1 \\ ac & ad & ah_2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} a & b & h_1 \\ 0 & ad-bc & ah_2 - ch_1 \end{array} \right]$$

Vi ser att villkoret för att rang = 2, är att $ad - bc \neq 0$. Fortsätter vi att lösa detta ES får vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} dh_1 - bh_2 \\ ah_2 - ch_1 \end{bmatrix} = \{\text{som kan skrivas}\} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Vi jämför detta med (*) och identifierar

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

En enkel verifisering visar att denna matris ggr $\mathbf{A}$ är $\mathbf{I}_2$.

Kommentarer

- Metoden ovan att beräkna inversen av en matris (här av ordning 2, eller typ 2×2) med *komplementmetoden*.

- Talet $ad-bc = \det \mathbf{A}$ är *determinanten* av matrisen $\mathbf{A}$. Detta tal finns för alla kvadratiske matriser och villkoret $\det \mathbf{A} \neq 0$ är ekvivalent med att $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ har entydig lösning.

Ex 3.2 Exempel 1.1 igen. Invers matris till koefficientmatrisen är

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 1 - 1 \cdot 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

så att lösningen på ES är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ex 3.3 Betrakta ES med koefficientmatris $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ och

HL = $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ =: $\mathbf{B}_1$, samma ES som i ex 1.5 i föreläsning I. Vi sätter

$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 = [x_{11} \ x_{21} \ x_{31}]^T$, en okänd matris av typ 3×1 . Lösningen är, enligt samma exempel

$$\mathbf{X}_1 = [x_{11} \ x_{21} \ x_{31}]^T = [4 \ 6 \ 5]^T.$$

Med ES på matrisform får vi alltså

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right].$$

Observera att HL i den sista matrisen är $\mathbf{X}_1$.

Vi löser nu ett liknande ES, med HL $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, m.h.a. matrisform

och sätter den obekanta matrisen till

$$\mathbf{X}_2 = [x_{12} \ x_{22} \ x_{32}]^T.$$

Vi observerar att vi redan har löst detta ES med HL = $\mathbf{B}_1$. Således får vi återigen en lösning. Dessutom blir $\mathbf{A}$ återigen radekvivalent med $\mathbf{I}_3$.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Således är $\mathbf{X}_2 = [x_{12} \ x_{22} \ x_{32}]^T = [0 \ 3 \ 1]$. Vi skulle kunna skriva detta som

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 = x_{12} \\ 0 & 1 & 0 & 3 = x_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 1 = x_{32} \end{array} \right].$$

Ex 3.4 Lösningen av det förra ES och detta ES görs med samma radoperationer och ger samma koefficientmatris $\mathbf{I}_3$ på radreducerad form. Alltså

kan vi lösa båda ES samtidigt. Som matrisekvation och matrisform har vi alltså

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] \text{ respektive } [\mathbf{A} | \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2].$$

Matrisformen uppfyller radekvivalensen nedan.

$$[\mathbf{A} | \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] \sim \dots \sim [\mathbf{I} | \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2].$$

1.2 Invers matris för matriser av ordning 3 och högre

- Den metod som utvecklas nedan kallas *Jakobis metod* och finns på sidan 126 dock utan att namnge metoden som Jakobis. Vi gör som det sista exemplet men för matrisekvationen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$, där $\mathbf{A}$ är kvadratisk av ordning 3 (typ 3×3). Utskrivet är

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3] = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Vi utreder sambandet mellan $\mathbf{A}^{-1}$ och $\mathbf{X}$:

Vi vet, å ena sidan, att om $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, så är $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$.

Å andra sidan, om $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$, multiplicera med $\mathbf{A}^{-1}$ från vänster i VL:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}.$$

Och multiplicera från vänster i HL:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Detta visar att $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

För att bestämma $\mathbf{X}$, som ju är $\mathbf{A}^{-1}$ i ekvationen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}$, utnyttjar vi matrisform och eliminationsmetoden. Det är vad som görs i följande exempel.

Ex 3.5 Vi inverterar med $\mathbf{A}$ som ovan och förväntar oss att få $\mathbf{I} = \mathbf{I}_3$ i vänster matris.

$$[\mathbf{A} | \mathbf{I}] \sim \dots \sim [\mathbf{I} | \mathbf{X}].$$

Då är $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$. Med siffror:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{array} \right]$$

Och den högra matrisen är $\mathbf{A}^{-1}$ (!) Detta går att verifiera genom att multiplicera den med $\mathbf{A}$ från vänster eller höger och få $\mathbf{I}_3$.

Linearitets- egenskaperna för matris

Givet en matris $\mathbf{A} = (a_{jk})_{m \times n}$ och två matriser (vektorer) $\mathbf{X}$ och $\mathbf{Y}$ i $\mathbb{R}^n$.

Elementet i position (på plats) (j, k) i produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ är alltså

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n$$

och för $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}$ är motsvarande element

$$a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \dots + a_{jn}y_n.$$

Och till sist motsvarande element i $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})$ fås om x_j byts mot $x_j + y_j$, alltså

$$a_{ji}(x_1 + y_1) + a_{j2}(x_2 + y_2) + \dots + a_{jn}(x_n + y_n) = \{\text{distr. lagen}\} =$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \dots + a_{jn}y_n$$

Vidrar slutsatsen att

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}). \quad (2)$$

Detta är en av två lagar som kallas *linearitet*.

Låt c vara ett reellt tal. Med $c \cdot \mathbf{A}$ menas den matris som har element $c \cdot a_{jk}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $n = 1, 2, \dots, n$, d.v.s. varje element multipliceras med c . Den andra är

$$c \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot (c \cdot \mathbf{X}). \quad (3)$$

1.3 Transponat och symmetrisk matris

Definition 1.1 Givet matrisen $\mathbf{A} = (a_{jk})_{m \times n}$, med element a_{jk} i position (j, k) .
Transponatet (transponatmatrisen) $\mathbf{A}^T$ är matrisen av typ $n \times m$ med element a_{jk} i position (k, j) .

Ex 3.6 koefficientmatrisen i exempel 1.7 är

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ och dess transponat är } \mathbf{A}^T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

VL i motsvarande ES kan skrivas

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A}^T = [x \quad y] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{array} \right] = \{\text{HL}\} = [5 \quad 9 \quad 6].$$

Ex 3.7 Matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ är inte symmetrisk (även om den är kvadratisk). Man ser det ty ex.vis $a_{12} = -1 \neq a_{21} = 1$. Däremot är $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ symmetrisk. Vi ser det genom direkt beräkning av matrisen.

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -6 \\ -1 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Definition 1.2 En matris är symmetrisk om $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Sats 1.1 Regler för transponatmatris

1.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \text{ om invers existerar.}$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

2. $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ är symmetrisk.
3. En symmetrisk matris är kvadratisk, d.v.s. $m = n$.
4. En matris $\mathbf{A} = (a_{jk})_{m \times n}$ är symmetrisk, om $a_{jk} = a_{kj}$, $j = 1, 2, \dots, m$ och $k = 1, 2, \dots, n$.

Ex 3.8 Med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ är } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

För att bestämma inversen till den sista matrisen behöver vi alltså bara transponera $\mathbf{A}^{-1}$. Den är

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Vektoraspekt
på en
 $m \times 1$ -matris**

Ex 3.9 Givet matrismultiplikationen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ och}$$

som utskrivet kan skrivas

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ 3x_3 - 2x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3.$$

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är vektorer.

- Även $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$ är en vektor, som är en *linjärkombination* av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$. För en fjärde vektor, $\mathbf{B}^T = [2 \quad -1 \quad 3]^T$, finns sådana att $\mathbf{B} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$? Detta är detsamma som att fråga sig om det finns ett $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ sådant att
- $$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Denna matrisekvation motsvarar ES i exempel 1.5, föreläsning I. Lösningen är $\mathbf{X}^T = [4 \quad 6 \quad 5]$.

Kommentarer

- Lösningen existerar och är entydig.
- Vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$, liksom $\mathbf{B}$.
- I själva verket finns entydig lösning $\mathbf{X}$ för *varje* HL (vektor) $\mathbf{B}$.
- Detta hänger ihop med att $\mathbf{A}$ har invers, se längre fram.
- Vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ utgör tillsammans en bas för $\mathbb{R}^3$.
- En bas är också $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = [1 & 0 & 0]^T \\ \mathbf{e}_2 = [0 & 1 & 0]^T \\ \mathbf{e}_3 = [0 & 0 & 1]^T \end{cases}.$

Fri och bunden variabel

Ex 3.10 Ett ES på matrisform med variablerna x_1 , x_2 , x_3 och x_4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

är på trappstagsform. De som räknas om bundna variabler är de som motsvarar pivotelement, d.v.s. x_1 och x_3 . De andra är fria. På radreducerad form får vi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array} \right].$$

För att slippa bråktal, kan vi inför parametrar för de fria variablerna på följande sätt:

$$x_2 = s, \quad x_4 = 3t.$$

Första och andra ekvationen kan då skrivas

$$\begin{cases} x_1 - s + 7/3 \cdot 3t = 2/3 \iff x_1 = s + 7t + 2/3, \text{ respektive} \\ x_3 + 1/3 x_4 = 5/3 \iff x_3 = -t + 5/3. \end{cases}, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

(Lösningen är ett hyperplan av dimension 2 i $\mathbb{R}^4$.)

Ex 3.11 Lös ES i Ex 1.7

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2y = 9 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

På matrisform blir det

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 6 \end{array} \right]$$

För vissa matriser med fler rader än kolonner finns en *vänsterinvers*. I detta fall duger

$$\mathbf{A}_L^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Eftersom detta ES har lösning, kan den beräkna lätt med $\mathbf{A}_L^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d.v.s. samma lösning som i exempel 1.7.

Kommentarer

- Med multiplikation med vänsterinvers, har man endast en implikation $\implies$, så om ursprungligt ES har lösning så erhålls den med vänsterinvers. Men man kan få falsk lösning, just p.g.a. $\implies$.