

11 september 2019

1 Föreläsning II

1.1 (Definition av matris)

1. En matris är ett rektangulärt schema med element, i varje position.
Två matriser är lika om elementen i varje position är lika.

2. Matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

har två rader $[a_{1,1} \ a_{1,2} \ a_{1,3}]$, rad 1, och $[a_{2,1} \ a_{2,2} \ a_{2,3}]$, rad 2.

$\mathbf{A}$ har tre kolonner, kolonn 1, 2 och 3:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{bmatrix}.$$

3. Matrisen $\mathbf{A}$ är av typ 2×3 . Man skriver

$$\text{typ } \mathbf{A} = 2 \times 3.$$

4. En matris av typ $m \times m$ är *kvadratisk* av ordning m .

Man observerar att för en matris $\mathbf{A}$ med typ $\mathbf{A} = m \times n$ är

- antal rader = antal element i en kolonn.

och

- antal kolonner = antal element i en rad.

Ex 2.1 Givet $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & b \\ 3 & 1 & c \end{bmatrix}$.

- antal rader = antal element i en kolonn = 2.

och

- antal kolonner = antal element i en rad = 3.

Ex 2.2 Matriserna $\mathbf{A}$ ovan och $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ är inte lika ty de är av olika typ.
Matriserna

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & b \\ 3 & 1 & c \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 \\ 3 & 1 & 17 \end{bmatrix}$$

är lika om $b = -10$ och $c = 17$.

1.2 De tre radoperationerna

- R1** Multiplikation av en rad med ett tal, som sedan adderas till en annan rad.
- R2** Platsbyte av två rader.
- R3** Multiplikation av en rad med ett tal $\neq 0$.

1.3 Rang av matris

- För en matris $\mathbf{A}$ finns en radekvivalent matris $\mathbf{A}'$ ($\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$), som är på trappstegsform (echelon form). Eventuella nollrader sätts sist. Vi bevisar inte detta men varje exempel visar att det stämmer.
- Rangén för $\mathbf{A}$ är antalet pivotelement i $\mathbf{A}'$. Det är detsamma som antal icke-nollrader i $\mathbf{A}'$ eftersom varje rad motsvarar en icke-nollrad och vice versa i $\mathbf{A}'$.

Ex 2.3 Antag att

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en matris på trappstegsform.}$$

Matrisen $\mathbf{A}$ antas vara alltså vara radekvivalent med $\mathbf{A}'$.
Pivotelementen är 3 och -2 en i varje icke-nollrad, d.v.s.
antal icke-nollrader i $\mathbf{A}'$ = antal pivotelement i $\mathbf{A}'$ = 2.

1.4 Matrisoperationer och matrisekvation (Lay 1.4, 2.1 och 2.2)

Regler för

matris-

operationer

se avsnitt 2.1 sidan 115.

- Multiplikation av en matris med ett reellt (komplext) tal sker elementvis.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \implies c \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & ca_{1,3} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & ca_{2,3} \end{bmatrix}.$$

- Addition av två matriser kräver att de är av samma typ. Additionen sker då elementvis. Med

$$\text{Med } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{bmatrix}$$

är

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \end{bmatrix}.$$

- Det finns en *nollmatris* för varje typ av matris. Ex.vis av typ 2×3 är den $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ med egenskapen $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- För varje matris $\mathbf{A}$ finns matrisen $-\mathbf{A}$, som innebär teckenändring av samtliga element i $\mathbf{A}$. Det är klart att $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
- Observera att kommutativa lagen för *multiplikation* inte finns med på sidan 115 (och den gäller inte).

-
- För multiplikation mellan två matriser börjar vi med $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ och multiplikationen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ är möjlig ty antal kolonner i $\mathbf{A}$ = antal rader i $\mathbf{B}$. Obs! Detta betyder att raden i $\mathbf{A}$ har lika många element som kolonnen i $\mathbf{B}$ ($= 3$). Produkten är

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}.$$

Sammanfattningsvis är

$$\text{typ } \mathbf{A} = 1 \times 3, \quad \text{typ } \mathbf{B} = 3 \times 1 \text{ och } 3 = 3.$$

Produkten blir ett tal eller en matris av typ 1×1 eller ett element, skrivet utan "[]".

- I föregående föreläsning I (ex 1.1) har vi en koefficientmatris $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Sätt $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, som matrisen med variablerna. Multiplikationen kan ses som skalär x respektive y ggr kolonnerna i $\mathbf{A}$, som sedan adderas.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \end{bmatrix} \quad (1)$$

en matris av typ 2×1 . HL i samma exempel skall vi också se som en matris,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sammantaget kan detta ES skrivas som en *matrisekvation*:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

I nästa exempel (ex 1.2) är koefficientmatrisen och HL

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \text{ respektive } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och motsvarande ES skrivs som en matrisekvation: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$.

- Matrismultiplikation på riktigt: Om vänster matris $\mathbf{A}$ har lika många element i en rad (= antal kolonner), som höger matris har element i en kolonn matris (= antal rader), så är $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ definierad, mer exakt, omö typ $\mathbf{A} = m \times n$ så måste typ $\mathbf{B} = n \times p$, för några m , n , och p .

$$\underset{m \times n \cdot n \times p}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \underset{m \times p}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}},$$

där elementet i position (i, k) är produkten av rad i i $\mathbf{A}$ och kolonn k i $\mathbf{B}$.

Ex 2.4 Med $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ får vi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot x + 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + y \end{bmatrix}$$

Ex 2.5 Givet ett ES på matrisform. Vi skriver det som en matrisekvation. Variabler är x , y , z .

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Som matrisekvation blir det

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

D.v.s. ett ES kan skrivas som en matrisekvation med operatorn gånger.

Ex 2.6 Med $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ kan vi multiplicera med $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ från *höger*. Det viktiga är ju att höger matris har två rader. Vi byter $\mathbf{X}$ mot en matris med lika många rader men *två* kolonner, ex.vis $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x & z \\ y & u \end{bmatrix}$. Då fungerar också multiplikationen:

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\mathbf{X}_1}_{2 \times 2} = \dots = \begin{bmatrix} 2x + z & u + 2y \\ x + z & u + y \end{bmatrix}$$

Ex 2.7 I allmänhet är $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, d.v.s. kommutativa lagen gäller inte. Låt $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vilka matriser $\mathbf{A}$ kommuterar med $\mathbf{B}$?

Lösning:

Det betyder att $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Då måste typ $\mathbf{A} = 2 \times 2$ (Verifiera!). Sätt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Det ger

$$\begin{bmatrix} a+b & 2b-a \\ c+d & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix}$$

Likhet mellan två matriser betyder att de är av samma typ och elementvis likhet råder. Det ger ett ES i a, c och d . Ekvivalent får vi att

$$\begin{bmatrix} b+c & -a+b+d \\ -a-c+d & -b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} b+c=0 \\ -a+b+d=0 \\ -a-c+d=0 \\ -b-c=0 \end{cases}.$$

Det sista ES kan ekvivalent skrivas

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ -a - c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -c \\ d = a - b \end{cases}.$$

Det betyder att

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a - b \end{bmatrix}$$

Kommentarer

- Frågan hur vi kan få lösningen $(x, y, z) = (4, 6, 5)$ m.h.a. matrisekvationen i föregående exempel.
- Vi kommer att ha användning av transponatet av en matris. Det är samma matris men med rad och kolonn byter plats.

Transponat-matris

Ex 2.8 Med $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ är transponatet

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Och mer allmänt (ty två transponat tar ut varandra, se nedan.)

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} \end{bmatrix} \iff \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

I ett tidigare exempel har vi $\mathbf{A}$ som koefficientmatris. Motsvarande ES kan skrivas som en matrisekvation

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Vi kan lika gärna skriva detta med motsvarande transponatmatriser: Först VL.

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T.$$

Vi kan enkelt verifiera detta.

Räkneregler för transponat

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

Vi verifierar nu att typerna är desamma i VL och HL i andra identiteten. Observera att i den andra identiteten är typ $\mathbf{A} = m \times n$ och typ $\mathbf{B} = n \times p$ för att $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skall fungera. Typen för VL ges av följande: typ $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = m \times p$, så att typ $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = p \times m$.

Typen för HL skall vara densamma och ges av

$$\text{typ } \mathbf{B}^T = p \times n, \quad \text{typ } \mathbf{A}^T = n \times m \implies \text{typ } (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T) = p \times n \cdot n \times m = p \times m.$$

Räkneregler, se sidan 117 i Lay.

Definition: Vi säger att en matris $\mathbf{A}$ är *symmetrisk*, om $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

- Antag att typ $\mathbf{A} = m \times n$. Då är typ $\mathbf{A}^T = n \times m$. Alltså måste $m = n$, d.v.s. $\mathbf{A}$ måste vara kvadratisk.

Sats: $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ är symmetrisk.

Bevis:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}.$$

1.5 Transponat och symmetrisk matris

Definition 1.1 Givet matrisen $\mathbf{A} = (a_{jk})_{m \times n}$, med element a_{jk} i position (j, k) .

Transponatet (transponatmatrisen) $\mathbf{A}^T$ är matrisen av typ $n \times m$ med element a_{jk} i position (k, j) .

Ex 2.9 koefficientmatrisen i exempel 1.7 är

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och dess transponat är } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

VL i motsvarande ES kan skrivas

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A}^T = [x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \{\text{HL}\} = [5 \quad 9 \quad 6].$$

Ex 2.10 Matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ är inte symmetrisk (även om den är kvadratisk). Man ser det ty ex.vis $a_{12} = -1 \neq a_{21} = 1$. Däremot är $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ symmetrisk. Vi ser det genom direkt beräkning av matrisen.

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -6 \\ -1 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Definition 1.2 En matris är symmetrisk om $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Sats 1.1 Regler för transponatmatris

1.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \text{ om invers existerar.}$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

2. $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ är symmetrisk.

3. En symmetrisk matris är kvadratisk, d.v.s. $m = n$.

4. En matris $\mathbf{A} = (a_{jk})_{m \times n}$ är symmetrisk, om $a_{jk} = a_{kj}$, $j = 1, 2, \dots, m$ och $k = 1, 2, \dots, n$.

Ex 2.11 Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$. Bestäm b och c så att $\mathbf{A}$ blir symmetrisk.

Lösning:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ b & c \end{bmatrix} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

betyder ju elementvis likhet. Alltså är

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 1 = b \\ b = 1 \\ c = c \end{cases} \quad \text{d.v.s. } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & c \end{bmatrix}, \quad c \text{ godtyckligt.}$$

Enhetsmatris Bland matriser finns en ”etta”, en *identitetsmatris* $\mathbf{I}$ av olika ordningar sådan att

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}. \quad (2)$$

Dessa är

$$\mathbf{I}_1 = [1], \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ etc}$$

Ex 2.12 Bestäm identitetsmatriser, sådana (2) gäller för $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$.

Lösning:

för multiplikation från vänster måste $\mathbf{I} = \mathbf{I}_2$ och för multiplikation från höger måste $\mathbf{I} = \mathbf{I}_3$.

Ex 2.13 Multiplikation med skalär (reellt tal) i matrisprodukt:

$$c \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot c\mathbf{B}.$$

Ex 2.14 I uttrycket $2\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ antar vi att typ $\mathbf{A} = m \times n$. Kan man faktorisera med högerdistributiva lagen så här

$$(2 + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}?$$

Nej ty det rör sig om olika typer av multiplikation. Däremot kan vi skriva $2 \cdot \mathbf{A} = 2\mathbf{I} \cdot \mathbf{A}$ och få

$$2\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (2\mathbf{I} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}.$$