

17 september 2019

1 Föreläsning IV

1.1 Mer om invers matris

Sats: Antag att $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är inverterbara matriser av samma ordning. Då är även $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ inverterbar med invers $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

Bevis:

Multiplikation från vänster:

$$(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

■

1.2 Mer matrisekvationer

Ex 4.1 Betrakta uttrycket $\mathbf{B} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Antag att $\mathbf{A}$ har fem kolonner och $\mathbf{B}$ har fyra rader. Bestäm typerna för de tre matriserna.

Lösning:

$$\text{typ } \mathbf{I} = 5 \times 5, \quad \text{typ } \mathbf{B} = 4 \times 5 \text{ och typ } \mathbf{A} = 4 \times 5.$$

Ex 4.2

- (a) Lös ut $\mathbf{X}$ i matrisekvationen

$$2\mathbf{X} - \mathbf{XA} = \mathbf{B}.$$

Förutsett att lämpliga matriser har invers.

- (b) Antag att $\mathbf{A}$ har tre rader och att $\mathbf{B}$ har fyra rader. Bestäm typen för de tre matriserna.

Lösning:

- (a) Lös ut $\mathbf{X}$ i matrisekvationen. . .

$$2\mathbf{X} - \mathbf{XA} = \mathbf{B} \iff \underbrace{2 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}}_{\text{VL}} = \mathbf{X}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{B}.$$

Vi antar alltså att $(2\mathbf{I} - \mathbf{A})$ har invers. Lösningen är därmed

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot (2\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

- (b) Eftesom $\mathbf{A}$ och $2\mathbf{I}$ är av samma typ, måste typ $\mathbf{A} = 3 \times 3$. $\mathbf{B}$ har lika många kolonner som $\mathbf{A}$, alltså 3 kolonner för $\mathbf{B}$, som ger att typ $\mathbf{B} = 4 \times 3 = \text{typ } \mathbf{X}$.

Ex 4.3 I Ex 1.8 har vi ett ES från elläran. Variabler är grenströmmarna I_1 , I_2 och I_3 . Motsvarande resistanser är kända liksom totalströmmen I . Som matrisekvation har vi (observera att det är inte samma koefficientmatris som i ex 1.8 ty raderna är i en annan ordning.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har lika många ekvationer som variabler, d.v.s. en kvadratisk koefficientmatris. Av rent praktiska skäl finns bara *en* lösning. Det säger att koefficientmatrisen har invers. Vi skall senare beräkna inversen och $\det \mathbf{A}$.

Ex 4.4 Bestäm inversen till $\mathbf{A} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ med Jakobis metod.

Ex 4.5 Avgör om följande matriser har invers (är inverterbara).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Lösning:

$\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är ej kvadratiska så invers finns inte.

$$|\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = -abd$$

så invers finns omm $abd \neq 0$.

Det sista exemplet visar på att om man har bara nollor under "huvuddiagonalen", är determinanten produkten av elementen i denna diagonal, sånär som på tecken.

1.3 Determinant

- **Determinant** av matris av ordning 2 har vi definierat sedan tidigare. Den är

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21}.$$

Vi skall ur denna determinant, se hur begreppet kan generaliseras. Vi har delas rad- och dela kolonnindex. i båda termerna är radindexen i ordningen (1, 2), den *kanoniska ordningen*.

- I den första termen är kolonnindexen i ordningen (1, 2) och behöver ingen, d.v.s. noll omflyttningar/inversioner för att få den i kanonisk ordning.
Därför är den första termen $(-1)^0 a_{11}a_{22}$.

- I den andra termen är kolonnindexen i ordningen $(2, 1)$ och behöver en, d.v.s. 1 omflyttning/inversion för att få den i kanonisk ordning. Därför är den andra termen $(-1)^1 a_{12} a_{21}$.

Definition 1.1

1. En permutation av $(1, 2, \dots, n)$ är en (om-)ordning av dessa tal.
2. För en permutation $(k_1, k_2, \dots, k_j, k_{j+1}, \dots, k_n)$ av talen $(1, 2, \dots, n)$ kallas ett (grann-)byte av plats av två intilliggande tal till $(k_1, k_2, \dots, k_{j+1}, k_j, \dots, k_n)$ en *inversion*.
3. Givet en reell matris $\mathbf{A} = (a_{jk})_{n \times n}$.
Determinanten av $\mathbf{A}$ definieras som

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\text{alla permutationer}} (-1)^{\text{inv}(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{nk_n} \quad (1)$$

Kommentarer

- Determinanten är summan över alla permutationer av $(1, 2, \dots, n)$. Dessa är $n!$.
- **Ett** (fjärr-)byte motsvaras av ett **udda** antal inversioner/grannbyten. Vi förklarar ett med ett exempel. Betrakta permutationen $(5, 2, 4, 3, 1)$. Vi fjärrbyter 1 och 5, alltså **ett** fjärrbyte. Nu räknar vi antal inversioner.

Steg I: Flytta 1 till plats 1.

$$(5, 2, 4, 3, 1), (5, 2, 4, 1, 3), (5, 2, 1, 4, 3), (5, 1, 2, 4, 3), (1, 5, 2, 4, 3)$$

d.v.s. 4 inversioner.

Steg II: Flytta 5 till plats 5.

$$(1, 5, 2, 4, 3), (1, 2, 5, 4, 3), (1, 2, 4, 5, 3), (1, 2, 4, 3, 5), (1, 2, 3, 4, 5)$$

d.v.s. 4 inversioner, totalt $4 + 4 = 8$ inversioner:

$$\text{inv}(5, 2, 4, 3, 1) = 8.$$

Eftersom antal inversioner är udda omm antal fjärrbyten är 2, är tecknet $(-1)^{\text{inv}(k_1, k_2, \dots, k_n)} = (-1)^8 = 1$.

- Determinanten av $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$ består av $3! = 6$ och är

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}.$$

- Vi ser att determinantens termer är produkten av tre element i $\mathbf{A}$ som är hämtade från *varje rad och kolonn*. Om en term innehåller faktorn $a_{1,1}$, så termen inte innehålla faktorer från samma rad och kolonn, alltså inte från rad 1 inte heller från kolonn 1. En annan faktor kan vara $a_{2,3}$ och således är den sista faktorn $a_{3,2}$. Sånär som tecken är termen $a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$.
Tecknet ges av

$$(-1)^{\text{inv}(1,3,2)} = (-1)^1 = -1.$$

- Ovanstående resonemang tillämpad på matrisen, med nollor (0) under huvuddiagonalen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \text{ ger } \det \mathbf{A} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}.$$

Ex 4.6 Beräkna determinanten av

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Vi skall beräkna de 3! termerna (med rätt tecken).

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 2 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot (-2) - \\ &\quad [0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 3] = -1. \end{aligned}$$

1.4 Sarrus regel

För matris av ordning 3 (typ 3×3), kan determinanten beräknas med denna regel. Man skriver upp första och andra kolonn t.h. om matrisens determinant:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + \dots$$

Man multiplcerar element i diagonalerna. För diagonaler snett nedåt åt hger får plustecken och diagonaler snett nedåt åt vänster får minutecken. Ex.vis får vi termen $(+)a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$ och termen $-1 \cdot a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}$.

1.4.1 Radoperationernas inverkan på determinant

Att $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$

- Vi skall nu se hur de tre radoperationerna påverkar determinanten. Om $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$, är då deras determinanter lika?
- Vi utför R1, R2 och R3 på nedanstående matris av ordning 2.

R1 Multiplicera rad 1 med c och lägg till andra rad:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \sim \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} + ca_{1,1} & a_{2,2} + ca_{1,2} \end{bmatrix}.$$

Och

$$\det \mathbf{A}' = a_{1,1}(a_{2,2} + ca_{1,2}) - a_{1,2}(a_{2,1} + ca_{1,1}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = \det \mathbf{A},$$

alltså ingen av determinantens värde.

R2 Radbyte ger

$$\det \mathbf{A}' = \det \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{bmatrix} = -\det \mathbf{A},$$

alltså teckenändring på determinanten.

R3 Multiplikation av en rad, säg första rad, med ett tal $c \neq 0$ ger

$$\det \mathbf{A}' = c(a_{1,2}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) = c \det \mathbf{A}.$$

Ex 4.7 Beräkna Determinanten av matrisen $\mathbf{A}$ m.h.a. radoperationerna.

Lösning:

Det gäller bara att hålla reda på R2 och R3. R1 påverkar inte determinantens värde.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{R2}\} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \{\text{R1}\} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ \{\text{R1}\} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -1. \end{aligned}$$

- Determinanten av transponatet till $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ får illustrera det allmänna fallet, d.v.s. determinanten för en matris av typ $n \times n$:

$$\det \mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Alltså

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}. \quad (2)$$

Mer om determinant Var och en av de $n!$ termerna i en determinant av $\mathbf{A}$ av typ $n \times n$ innehåller en faktor från varje rad och varje kolonn. Speciellt om $\mathbf{A}$ har en nollrad (eller nollkolonn) är determinanten $= 0$.

Om determinanten innehåller två identiska rader är determinanten också $= 0$. Imatrisen nedan låt $\mathbf{a}_j$ vara rad j och antag att rad j är lika med rad k , d.v.s. $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_j$.

R1: I matrisen $\mathbf{A}$ nedan multipliceras rad j med -1 och adderas till rad k , som ju är lika, blir den nya rad k lika med noll, en nollrad

$$\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$$

och eftersom **R1** inte förändrar determinantens värde, är

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1- \\ -\mathbf{a}_2- \\ \ddots \\ -\mathbf{a}_j- \\ \ddots \\ -\mathbf{a}_k- \\ \ddots \\ -\mathbf{a}_n- \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1- \\ -\mathbf{a}_2- \\ \ddots \\ -\mathbf{a}_j- \\ \ddots \\ -\mathbf{0}- \\ \ddots \\ -\mathbf{a}_n- \end{bmatrix} = \mathbf{A}'.$$

Och $\det \mathbf{A}' = 0$. Detta visar att $\det \mathbf{A} = 0$.

Rad och kolonn Vi har enligt ovan att $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$. Vi kan alltså göra *kolonnoperationer* likaväl som radoperationer med samma påverkan på determinanten.

Speciellt ändrar radoperationerna R1, R2 och R3 inte på om $\det \mathbf{A} \neq 0$ eller $\det \mathbf{A} = 0$. D.v.s.

Om $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$ så gäller $\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \det \mathbf{A}' \neq 0$.

1.5 Cramers regel

Om man önskar bestämma endast en komponent/koordinat, säg x_1 i $\mathbf{X}^T = [x, x_2 \dots x_n]^T$ går detta göra med denna regel.

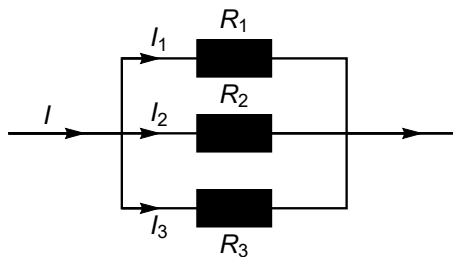
Ex 4.8 I exempel 1.5 har vi ett ES på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

Vi beräknar x i $[x \ y \ z]^T$ och byter alltså kolonn 1 i $\mathbf{A}$ mot HL.

$$x = \frac{\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right|} = \frac{-4}{-1} = 4.$$

Ex 4.9



Elkretsen i exempel 1.8 och exempel 4.3.

Vi har detta ES som matrisekvation. Vi kanske bara är intresserade att bestämma en ström, säg I_2 . Det är möjligt med denna regel. Vi utgår från att vi har motsvarande matrisekvation

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man använder då determinanter och får

$$I_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}$$

där $\mathbf{A}_2$ är den matris som erhålls om kolonn 2 i $\mathbf{A}$ byts mot högerledet.

1. Täljaren:

$$\begin{vmatrix} 1 & \textcolor{red}{I} & 1 \\ R_1 & \textcolor{red}{0} & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{0} & -R_3 \end{vmatrix} = R_1 R_3 I.$$

2. Nämnaren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 \end{vmatrix} = \{\text{R1}\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ 0 & R_1 + R_2 & R_1 \end{vmatrix} = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$$

Det betyder att

$$I_2 = \frac{R_3 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} I.$$

1.6 En räkneregel för determinanter

För de tre uttrycken $\det \mathbf{A}$, $\det \mathbf{B}$ och $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ finns ett samband, om typ $\mathbf{A} =$ typ $\mathbf{B}$, som dock är svårt att bevisa.

Sats 1.1 Om, för två kvadratiska matriser med typ $\mathbf{A} =$ typ $\mathbf{B}$, så är

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (3)$$

Bevis:

Vi bevisar satsen för matriser av ordning 2 (2×2).

$$\text{VL} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) \cdot (b_{1,1}b_{2,2} - b_{1,2}b_{2,1}).$$

För HL behöver vi först produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}$$

med determinant

$$HL = (a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}) \cdot (a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}) - (a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2}) \cdot (a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1}).$$

Att avgöra att dessa uttryck är lika, ser vi att VL har termerna

$$\begin{aligned} & a_{1,1}a_{2,2}b_{1,1}b_{2,2} \\ & -a_{1,1}a_{2,2}b_{1,2}b_{2,1} \\ & -a_{1,2}a_{2,1}b_{1,1}b_{2,2} \\ & a_{1,2}a_{2,1}b_{1,2}b_{2,1}. \end{aligned}$$

Vi ser att dessa termer även finns i HL men HL har ytterligare fyra termer. Dessa är

$$a_{1,1}a_{2,1}b_{1,1}b_{1,2}, -a_{1,1}a_{2,1}b_{1,1}b_{1,2}, a_{1,2}a_{2,2}b_{2,1}b_{2,2}, -a_{1,2}a_{2,2}b_{2,1}b_{2,2},$$

som p.g.a. parvis likhet men med olika tecken, tar ut varandra. Detta avslutar beviset.

■

Vi illustrerar satsen med ett exempel.

Ex 4.10 I ex 1.1. och 1.2 har vi koefficientmatriserna $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ respektive

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Vi multiplicerar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ med determinant } 8 \cdot 3 - 4 \cdot 6 = 0.$$

För

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

måste en av faktorerna vara 0. Nu är $\det \mathbf{B} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$, så det stämmer.

1.7 Nolldivisor

För reella tal, som ovan, gäller att $a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$. Det gäller inte matriser. Betrakta följande två matriser som inte är nollmatriser, d.v.s. alla element är inte 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}. \text{ Då är } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en nollmatris.

1.8 Utvecklingssatsen för determinant (Definition i Lay, sidan 183)

För matrisen nedan kan man beräkna dess determinant genom att utveckla den i underdeterminanter.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi beräknar determinanten genom att utveckla m.a.p. rad 1.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

d.v.s. man får tre termer.

1:a term är determinanten av den matris, som erhålls då rad 1 och kolonn 1 stryks i $\mathbf{A}$ gånger $a_{1,1} = 2$ samt gånger $(-1)^{1+1}$.

2:a term är determinanten av den matris, som erhålls då rad 1 och kolonn 2 stryks i $\mathbf{A}$ gånger $a_{1,2} = -1$ samt gånger $(-1)^{1+2}$.

3:e term är determinanten av den matris, som erhålls då rad 1 och kolonn 3 stryks i $\mathbf{A}$ gånger $a_{1,3} = 0$ samt gånger $(-1)^{1+3}$.

Fortsatta räkningar ger

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = 2 \cdot (-2) + (-1)^2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot (-2) = -1.$$