

1 MK-metoden; Linjär regression

För rent fysikaliska system förväntar man sig lika många ekvationer (villkor) som variabler, samt att man får *en* lösning. Vid experiment kan dock göra fler mätningar än vad det finns variabler att bestämma.

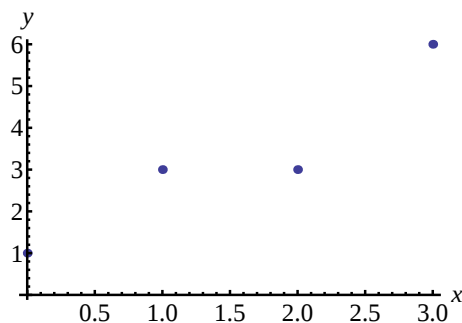
1.1 Anpassning av linje till punkter

Ex 5.1

Givet punkterna (x_k, y_k) , $k = 1, 2, 3, 4$ med koordinater

$$\left\{ \begin{array}{l|l} x_1 = 0 & y_1 = 1 \\ x_2 = 1 & y_2 = 3 \\ x_3 = 2 & y_3 = 3 \\ x_4 = 3 & y_4 = 6 \end{array} \right.$$

Vi skall anpassa en linje $y = kx + m$ "så gott det går" med MK-metoden. Detsom är okänt (variabler) och som söks, är k och m .



Vi får ett ES med 4 ekvationer och 2 obekanta, alltså ett *överbestämt* ES:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 \cdot k + m & = & 1 \\ 1 \cdot k + m & = & 3 \\ 2k + m & = & 3 \\ 3k + m & = & 6 \end{array} \right.$$

Som matrisekvation:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix},$$

som vi skriver kortare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Man löser detta ES på matrisform och finner att lösning saknas (0 lösningar). Istället löser man ES approximativt och använder matrisekvationen. Det innebär att man multiplicerar med $\mathbf{A}^T$ från vänster och får (med implikation $\Rightarrow$)

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y}.$$

Man kan visa att denna matrisekvation alltid har lösning $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}$, som är den bästa lösningen i MK-mening. Vi återkommer till detta längre fram.

I VL:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ med determinant } = 4(7 \cdot 2 - 3^2) = 20 \neq 0.$$

Alltså existerar inversmatrisen och är

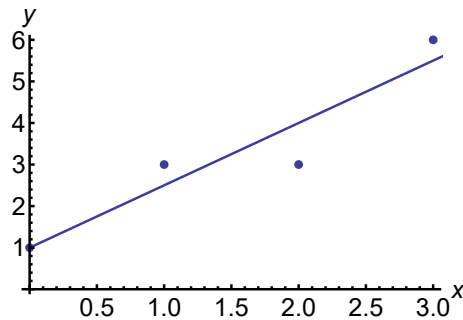
$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{HL} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Lösningen är alltså

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{Y} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Linjens ekvation är alltså $y = \frac{3}{2}x + 1$.



Ex 5.2 I exempel 1.7 (föreläsning 1) har vi ett överbestämt ES. Det visar sig att detta ES har lösning närmare bestämt

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2y = 9 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 6 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ex 5.3 Vi löser ett liknande ES med samma VL men annat HL: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A}|\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 13 \end{array} \right].$$

alltså rangen är 2 och 3 för koefficient- respektive totalmatris. Noll lösningar.

Ex 5.4 Man kan dock ge en hyfsad bra lösning med Minsta Kvadratmetoden (Least square method). Då multiplicerar man med transponatet $\mathbf{A}^T$ till koefficientmatrisen *från vänster* i båda led. Man får då en implikation:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \implies \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Det ger

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \text{ och HL } \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Den uppkomna matrisekvationen (reducerade ES, RES)

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$$

har alltid lösning även om det ursprungliga ES saknar det. Vi visar inte detta utan löser den RES i detta exempel:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ och nytt HL: } \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Lösningen på RES med siffror blir

$$\hat{\mathbf{X}} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Hur bra är den här lösningen? Man definierar medelfelet η som

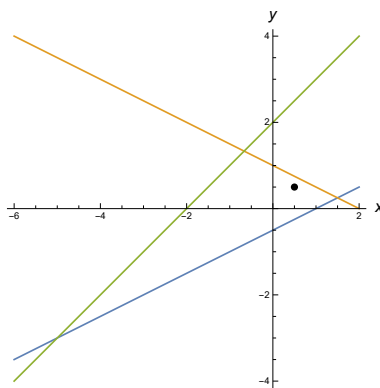
$$\eta := \frac{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B}\|}{\sqrt{3}}$$

för varje approximativ lösning av den ursprungliga ekvationen. Man kan visa att η är som minst, då $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}$, där $\hat{\mathbf{X}}$ ges av RES

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}.$$

I detta exempel är medelfelet

$$\eta = \frac{|(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{9/4 + 1/4 + 4}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{13}{6}} \approx 1.47$$



Övningar

4.1 Lös följande ES med MK-metoden och ange medelfelet.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y - x = 2 \\ x - y = -2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y - x = 1 \\ x - y = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - x = 1 \\ x - y = -1 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$$