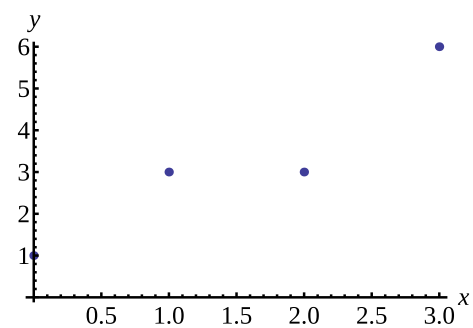
1 MK-metoden; exempel och övningar

Ibland vill man ha en lösning till ett ES som saknar lösning, fr.a. ett överbestämt ES. Man kan då få en ”bästa lösning”, en lösning som nästan är lösning till det givna ES. Ex.vis kan det röra sig om att man har fyra punkters koordinater (fyra villkor/ekvationer) som en linje på formen $y = kx + m$ skall gå genom (Två variabler k och m). Ett motsvarande ES är alltså överbestämt. Man får $kx_j + m = y_j$ för (x_j, y_j), $j = 1, 2, 3, 4$.

Ex 1 Givet punkterna (x_k, y_k), $k = 1, 2, 3, 4$ med koordinater

$$\left\{ \begin{array}{c|c} x_1 = 0 & y_1 = 1 \\ x_2 = 1 & y_2 = 3 \\ x_3 = 2 & y_3 = 3 \\ x_4 = 3 & y_4 = 6 \end{array} \right.$$

Vi skall anpassa en linje $y = kx + m$ ”så gott det går” med MK-metoden. Detsom är okänt (variabler) och som söks, är k och m.



Vi får ett ES med 4 ekvationer och 2 obekanta, alltså ett *överbestämt* ES:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 \cdot k + m & = & 1 \\ 1 \cdot k + m & = & 3 \\ 2k + m & = & 3 \\ 3k + m & = & 6 \end{array} \right.$$

Som matrisekvation:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix},$$

som vi skriver kortare $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$.

Man löser detta ES på matrisform och finner att lösning saknas (0 lösningar).

Istället löser man ES approximativt och använder den reducerade matrisekvationen. Det innebär att man multiplicerar med $\boldsymbol{A}^T$ från vänster och får (med implikation $\Longrightarrow$)

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y}.$$

Man kan visa att denna matrisekvation alltid har lösning $\boldsymbol{X} = \overset{\wedge}{\boldsymbol{X}}$, som är den bästa lösningen i MK-mening. Vi återkommer till detta längre fram.

I VL:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ med determinant } = 4(7 \cdot 2 - 3^2) = 20 \neq 0.$$

Alltså existerar inversmatrisen och är

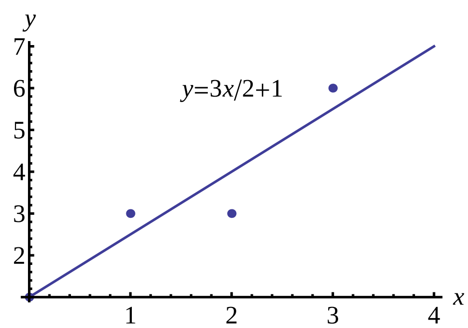
$$(A^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\text{HL} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Lösningen är därmed

$$(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Linjens ekvation är alltså $y = \dfrac{3}{2}x + 1$.



Vi får lösningen

$$\boldsymbol{X} = \overset{\wedge}{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

För *varje* $\boldsymbol{X}$, inte bara för $\overset{\wedge}{\boldsymbol{X}}$, är givetvis $\boldsymbol{A} \cdot \overset{\wedge}{\boldsymbol{X}} \neq \boldsymbol{Y}$.
Vektorn

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$$

kallas *felvektorn* (Eventuellt är felvektorn definierad som $\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}$.)
Medelfelet definieras om

$$\eta := \frac{|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}|}{\sqrt{m}}$$

där m är antal ekvationer i matrisekvationen.
Man kan visa att medelfelet är som minst om $\boldsymbol{X} = \overset{\wedge}{\boldsymbol{X}}$. Vi beräkna medelfelet för, dels för $\overset{\wedge}{\boldsymbol{X}}$ och dels för ett annat $\boldsymbol{X}$. Obs! $m = 4$.

$$\eta := \frac{|\boldsymbol{A} \cdot \overset{\wedge}{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Y}|}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3/2}}{2} = 0.612372...$$

Vi beräkna nu medelfelet $=: \eta_1$ för ex.vis $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, som alltså är minst lika så stort som η ovan. Det blir $\eta_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 1.11803... > 0.612372....$

Ex 2 Givet tre linjer $y = 2x - 1$, $x = 2 + 2y$ och $x + y = 0$. Dessa skär varandra inte i *en* punkt. D.v.s. ES med dessa tre ekvationer saknar lösning (är överbestämt). Som matrisekvation

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} \text{ och med siffror } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi tar frm den bästa lösningen i MK-mening, d.v.s. löser

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y} \text{ alltså } \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Matrisen $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$ är symmetrisk (enligt teorin) och har dessutom invers. Lösningen ges av

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{Y} = \ldots = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

För medelfelet behövs felvektorn

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

är

$$\eta = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} = 0.333\ldots.$$

Övningar

1.1 Lös följande ES med MK-metoden och ange medelfelet.

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x + 2y & = & 3 \\ y - x & = & 1 \\ x - y & = & -2 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} x + 2y & = & 3 \\ y - x & = & 1 \\ x - y & = & -2 \\ y & = & 5 \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} x + 2y & = & 5 \\ y - x & = & 1 \\ x - y & = & -1 \end{cases} \qquad \text{d)} \quad \begin{cases} x + 2y & = & 5 \\ y - x & = & 1 \\ x - y & = & -1 \\ 2y - x & = & 1 \end{cases}$$

1.2 Anpassa med MK-metoden, en linje till punkterna

$$P_1 = (1;2), \quad P_2 = (2;3), \quad P_3 = (3;5), \quad P_4 = (4;8)$$

samt beräkna medelfelet.

1.3 Beräkna en parabel $y = ax^2 + bx + c$ till samma punkter, som i föegående övning. Vad är medelfelet?

Facit

1.1 Lös följande ES med MK-metoden och ange medelfelet.

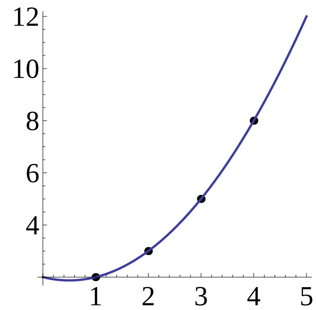
$$\text{a)} \quad (x,y) = \left(0, \frac{3}{2}\right), \eta = \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \text{b)} \quad (x,y) = (0,2), \eta = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\text{c)} \quad (x,y) = (1,2), \eta = 0 \qquad \text{d)} \quad (x,y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right), \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.2 $k = 2$, $m = -1/2$, $\eta = 1/2$.

1.3

$$a = 1/2, \quad b = -1/2, \quad c = 2, \quad \eta = 0.$$


12
10
8
6
4
1
2
3
4
5