

October 7, 2019

Innehållsregister

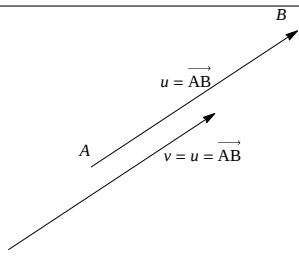
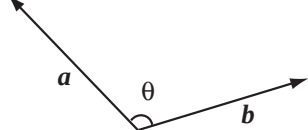
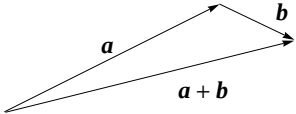
1 Föreläsning VI: Vektorer	1
1.1 Geometrisk vektor	1
1.2 Vektor och koordinatsystem	3
1.2.1 Linjens ekvation på parameter/vektorform	3
1.2.2 Enhetsvektor	4
1.3 Skalar produkt (dot or inner product)	4
1.4 Vinkel mellan vektorer	5
1.5 $\mathbb{R}^3$	6
1.6 Vektorprodukt (Cross product)	7
1.7 Plan och linje	8
1.8 Triangel och tetraeder	9
1.8.1 Volym av tetraeder samt trippel skalarprodukt	9

1 Föreläsning VI: Vektorer

1.1 Geometrisk vektor

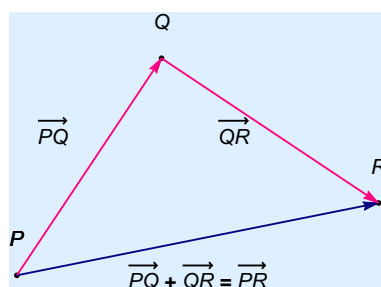
Med en geometrisk vektor menas vektor utan koordinatsystem. Där definieras vektoralgebran. Vi definierar följande egenskaper.

- En vektor betecknas med gemen och fet stil $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ etc.
- En vektor äger två egenskaper längd $\|\mathbf{a}\|$ och riktning.
- En vektor kan förflyttas parallellt.
- $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ med liket omm $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, nollvektorn.
- Vektorn $c\mathbf{a}$ är vektorn (anti-)parallell med $\mathbf{a}$, där $c \geq 0$ ($c < 0$) och har längden $\|c\mathbf{a}\| = |c| \cdot \|\mathbf{a}\|$.
- Vinkeln mellan två vektorer är vinkeln θ mellan vinkelbenen $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, där startpunkterna sammanfaller. $0 \leq \theta \leq \pi$. Om $\theta = 0$ ($= 0^\circ$) är vektorerna parallella. Om $\theta = \pi$ ($= 180^\circ$) är vektorerna motsatt riktade eller antiparallella.
- Addition av vektorer: Vektorn $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ är vektorna med startpunkt som $\mathbf{a}$ och slutpunkt som $\mathbf{b}$ då $\mathbf{a}$:s slutpunkt och $\mathbf{b}$:s startpunkt sammanfaller.

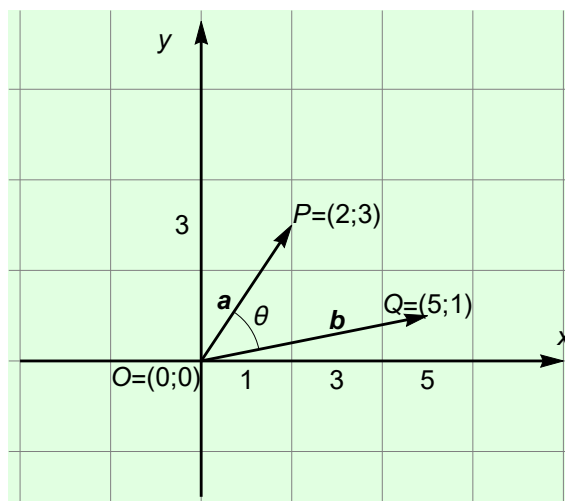
	T.v. två vektorer är lika Om de är lika långa och lika riktade. Nedåt t.v. Vinkeln θ mellan två vektorer är vinkeln mellan vektorerna med gemensam startpunkt. Nedan: Addition av vektorer.
	

- För tre punkter P , Q och R kan vi definiera tre vektorer. Dels $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ och $\overrightarrow{PR}$.
Geom att rita dessa ser vi att ex.vis är

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$



1.2 Vektor och koordinatsystem



EXEMPEL 6.1 Givet en punkt $P = (2; 3)$ så är 2 och 3 dess *koordinater*.

Motsvarande *ortsvektor* är $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = (2, 3)$ med startpunkt i origo och slutpunkt i P . 2 och 3 är dess *komponenter*.

Längden av vektorn är då $\|(2, 3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2}$, som ju också är avståndet mellan origo och punkten $P = (2; 3)$.

Addition av vektorer är komponentvis. Multiplikation med skalär (reellt tal) ger också komponentvis.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, 3) + (5, 1) = (7, 4), \quad c \cdot \mathbf{a} = (2c, 3c) \text{ med längd } |c| \cdot \sqrt{13}.$$

■

Kommentarer

- I Lay skrivs vektorer med komponenter som matriser av typ $m \times 1$, d.v.s. som kolonner.

1.2.1 Linjens ekvation på parameter/vektorform

EXEMPEL 6.2

Givet de två punkterna $P = (2; 3)$ och $Q = (5; 1)$. Definiera motsvarande ortsvektorer $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} = (2, 3)$ och $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b} = (5, 1)$. Bestäm en ekvation genom dessa två punkter:

Startpunkt, som vektor, kan vi ta $\mathbf{r}_0 := \mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = (2, 3)$ och som *riktningsvektor* kan vi ta

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (5, 1) - (2, 3) = (3, -2).$$

En ortsvektor på linjen kan uttryckas med dessa. Sätt $\mathbf{r}_0 = (2, 3) = \mathbf{a}$.

$$\mathbf{r} := (x, y) = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{v} \text{ eller } (x, y) = (2, 3) + t(3, -2), t \in \mathbb{R}.$$

Vi kan eliminera t ur första koordinaten och likaså ur andra:

$$y = \frac{1}{3}(13 - 2x).$$

■

1.2.2 Enhetsvektor

EXEMPEL 6.3 En enhetsvektor $\mathbf{e}$ är en vektor med längd 1. Ex.vis är $\mathbf{a} = (2, 3)$ inte en enhetsvektor eftersom dess längd är $\sqrt{13}$. Men däremot är $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3)$ en enhetsvektor parallell med $\mathbf{a}$.

■

Enhetsvektorer parallella med koordinataxlarna är

$$\begin{cases} (1, 0) &= \mathbf{i} = \mathbf{e}_x \\ (0, 1) &= \mathbf{j} = \mathbf{e}_y \end{cases} \text{ i } \mathbb{R}^2 \text{ och } \begin{cases} (1, 0, 0) &= \mathbf{i} = \mathbf{e}_x \\ (0, 1, 0) &= \mathbf{j} = \mathbf{e}_y \\ (0, 0, 1) &= \mathbf{k} = \mathbf{e}_z \end{cases} \text{ i } \mathbb{R}^3.$$

Man kan skriva en vektor $\mathbf{u} = (x_1, y_1) = (x_1, 0) + (0, y_1) = x_1 \cdot (1, 0) + y_1 \cdot (0, 1) = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}$.

1.3 Skalär produkt (dot or inner product)

Definition 1.1 Skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \theta$.

Kommentarer

- $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$ och $\cos 180^\circ = -1$, så att

$$-\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \leq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

Dessutom är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, om $\theta = 90^\circ$.

- Man kan visa att skalärprodukten är distributiv:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.$$

- Speciellt för en vektor med längd 1 är

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \|\mathbf{e}\| \cdot \|\mathbf{e}\| \cdot \cos 0^\circ = 1.$$

Och mer allmänt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2.$$

Om två vektorer är vinkelräta är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos 90^\circ = 0$.

- Ex.vis är

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1, 2) \cdot (5, 4) = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \\ &= \mathbf{i} \cdot 5\mathbf{i} + \mathbf{i} \cdot 4\mathbf{j} + 2\mathbf{j} \cdot 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \cdot 4\mathbf{j} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 13. \end{aligned}$$

- Allmänt är för vektorer i $\mathbb{R}^2$ på komponentform

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

1.4 Vinkel mellan vektorer

Vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta \iff \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}.$$

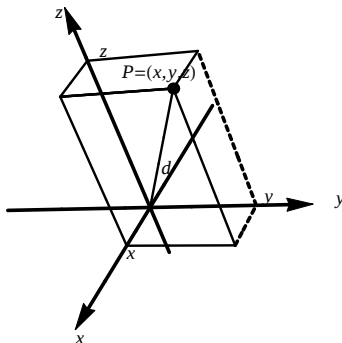
- Vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2)$ och $\mathbf{v} = (5, 4)$ ges av sambandet

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{13}{\sqrt{5} \cdot 41} \iff \theta = \arccos \left(\frac{13}{\sqrt{5} \cdot 41} \right)$$

- P.s.s. är cosinus för vinkeln mellan $\mathbf{a} = (2, 3)$ och $\mathbf{b} = (5, 1)$

$$\cos \theta = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \theta = 45^\circ.$$

1.5 $\mathbb{R}^3$



Koordinataxlarna x -, y - och z -axeln bildar et *högersystem* i den ordningen. Addition och multiplikation med skalär, samt skalär produkt är som i $\mathbb{R}^2$.

EXEMPEL 6.4 Givet $P = (1; 2; 1)$ och $Q = (3; 5; 8)$. Då är linjens ekvation på parameterform (genom dessa två punkter)

$$(x, y, z) = t\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OP} \text{ och med siffror } \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 7t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

■

EXEMPEL 6.5 Vinkeln mellan $\overrightarrow{OP} = (1, 2, 1) =: \mathbf{u}$ och $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{v}$ beräknas p.s.s. som $\mathbb{R}^2$:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{(1, 2, 1) \cdot (3, 5, 8)}{\|(1, 2, 1)\| \cdot \|(3, 5, 8)\|} = \frac{21}{\sqrt{6}\sqrt{98}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta = 30^\circ.$$

■

1.6 Vektorprodukt (Cross product)

Bara i rummet $\mathbb{R}^3$ finns en vektoriell produkt (vektorprodukt eller cross product). Givet två vektorer $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ och $\mathbf{v} = (3, 5, 8)$. Dessa kan läggas i ett plan i $\mathbb{R}^3$.

Definition 1.2 Man definierar då en tredje vektor utifrån dessa två som skrivs $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. För $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ gäller följande

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$.
2. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ bildar ett *högersystem*.
3. Längden $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \theta$.

Kommentarer

- $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ eftersom dess längd är $\|\mathbf{u}\|^2 \cdot \sin \theta$ och vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och sig själv är $\theta = 0^\circ$ och $\sin 0^\circ = 0$.
- Om $\theta = 90^\circ$ är $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cdot 1$

Sats 1.1

- Vektorprodukten är antikommutativ, som betyder att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
- Vektorprodukten är vänster- och högerdistributiv (men inte associativ).

Kommentarer

- Det följer att $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, om $\theta = 0^\circ$ eller $\theta = 180^\circ$.
- Vidare är $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, om $\theta = 90^\circ$.
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (Antikommutativitet).
- Man kan visa att vektorprodukten är vänster- och högerdistributiv.

EXEMPEL 6.6 Givet punkterna $P = (1; 1; 3)$, $Q = (2; 3; 4)$ och $R = (4; 6; 11)$. Vi bildar vektorerna

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 1) \text{ och } \overrightarrow{PR} = (3, 5, 8).$$

Dessa kan vi skriva med m.h.a. basvektorerna $\mathbf{e}_x = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$,
 $\mathbf{e}_y = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{e}_z = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

$$\mathbf{a} := \overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ och } \mathbf{b} := \overrightarrow{PR} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

Innan vi multiplicerar ihop dessa, ser vi att $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$, nollvektorn, eftersom mellanliggande vinkel är $\theta = 0^\circ$. P.s.s. med de två andra basvektorerna. Dessutom är

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \text{ och } \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

detta beror på att koordinataxlarna, x -, y - och z -axlarn utgör ett högersystem i den ordningen. Distributiva lagarna ger att

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = \\ &= (2 \cdot 8 - 5 \cdot 1)\mathbf{i} + (1 \cdot 3 - 8 \cdot 1)\mathbf{j} + (1 \cdot 5 - 2 \cdot 3)\mathbf{k} = (11, -5, -1),. \end{aligned}$$

Man kan alternativt göra beräkningen med determinant av ordning 3:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (16 - 5)\mathbf{i} + (3 - 8)\mathbf{j} + (5 - 6)\mathbf{k} = (11, -5, -1).$$

Vi verifierar att denna vektor är vinkelrät mot $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (1, 2, 1) \cdot (11, -5, -1) = 11 - 10 - 1 = 0.$$

P.s.s. med $\mathbf{b}$ (Övning!)

■

1.7 Plan och linje

EXEMPEL 6.7 Bestäm en ekvation för planet, som innehåller punkterna i föregående exempel.

Lösning

Vi vet att $(11, -5, -1) =: \mathbf{n}$ är vinkelrät mot de två vektorerna $(1, 2, 1)$ och $(3, 5, 8)$ och dessa vektorer är parallella med planet. Man säger då att $\mathbf{n} = (11, -5, -1)$ är *normalvektor* till planet. Detta plan består av alla punkter $(x, y, z) (= \mathbf{r}$ som Ortsvektor), sådana att $\mathbf{n} \perp \mathbf{r} - \overrightarrow{OP}$, alltså

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \overrightarrow{OP}) = 0.$$

Med talen givna av ovan, är

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \overrightarrow{OP}) = (11, -5, -1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 3)) = 11x - 5y - z - 3 = 0.$$

■

Kommentarer

- Planets ekvation blir densamma även om man byter A mot B eller C .
- Planets allmänna ekvation kan skrivas

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

1.8 Triangel och tetraeder

EXEMPEL 6.8 Beräkna arean av triangeln med hörn i P , Q och R .

Lösning

Enligt areasatsen för triangel är arean $T = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \theta$ där θ är mellanliggande vinkel till sidorna med längder a och b . Nu är $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta$, om $a = |\mathbf{a}|$ och $b = |\mathbf{b}|$.

■

I vårt fall är alltså arean

$$T = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{2} = \frac{\sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-1)^2}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ a.e.}$$

1.8.1 Volym av tetraeder samt trippel skalärprodukt

EXEMPEL 6.9 Beräkna volymen på den tetraeder som har hörn i P , Q , R och $S = (4; 5; 7)$.

Lösning

$\overrightarrow{PS} = (3, 4, 4)$. Volymen är

$$V = \frac{(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS}}{6}$$

Nu är denna "trippel skalär produkt" möjlig att beräkna som en determinant.

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dots = 9.$$

Volymen är $V = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ v.e.

■

EXEMPEL 6.10 Beräkna avståndet mellan punkten S och planet Π ovan.

Lösning

Vi ser att avståndet

$$d = |\vec{PS}| \cos \varphi$$

där φ är vinkeln mellan $\vec{PS}$ och $\mathbf{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR}$. Vi använder skalär produkt för att uttrycka avståndet d .

$$d = |\vec{PS}| \cos \varphi = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{PR}| |\vec{PS}| \cos \varphi}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|} = \frac{(\vec{PQ} \times \vec{PR}) \cdot \vec{PS}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}.$$

För att få en formel för avståndet skriver vi $S = (x_1; y_1; z_1)$ och $P = (x_0; y_0; z_0)$. Då blir

$$\vec{PS} = (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0)$$

Vi skiftar nu beteckningar och skriver $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \mathbf{n}$. I täljaren står en faktor $\vec{PS}$. Täljaren blir med detta byte av bokstäver

$$\mathbf{n} \cdot ((x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0)) = \mathbf{n} \cdot (x_1, y_1, z_1) - \mathbf{n} \cdot (x_0, y_0, z_0).$$

Och sedan inför vi $\mathbf{n} = (A, B, C)$, alltså dessa bokstäver betyder nu komponenter för normalvektorn. Med $\mathbf{n} = (A, B, C)$ blir den första termen

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1$$

och den andra termen

$$-(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Nu ligger punkten (x_0, y_0, z_0) i planet (ursprungligen punkten P). Det betyder att

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \iff D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Avståndet kan alltså skrivas

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Nu kan φ vara trubbig varför $\cos \varphi < 0$. Därför behövs ett absolutbelopp på täljaren.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

I exemplet är alltså $\mathbf{n} = (A, B, C) = (11, -5, -1)$ och punkten $(x_1, y_1, z_1) = (4, 5, 7)$. Avståndet blir alltså

$$d = \frac{|11 \cdot 4 + (-5) \cdot 5 + (-1) \cdot 7 - 3|}{\sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

■

Kommentarer

- I exemplet ovan har vi produkterna

$$(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS}.$$

Denna produkt med tre vektorer kallas *trippel skalär produkt*. Vi kan beräkna $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ som en determinant med översta raden [**i** **j** **k**]. Vi gör *två* byten i denna determinant, så att vi får raderna

$$\begin{vmatrix} - & \overrightarrow{PQ} & - \\ - & \overrightarrow{PR} & - \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

där (x_1, y_1, z_1) . I den trippla skalärprodukten ersätts sista raden med $\overrightarrow{PS}$, så att

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} - & \overrightarrow{PQ} & - \\ - & \overrightarrow{PR} & - \\ - & \overrightarrow{PS} & - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \dots = 9.$$

EXEMPEL 6.11 I detta exempel har vi två ekvationer som är ekvationer för plan i $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \Pi_1 : & x - y + 2z = 0 \\ \Pi_2 : & 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

med lösning $(x, y, z) = (1, 1 + 2t, t) = t(0, 2, 1) + (1, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Riktningsektor är $\mathbf{v} = (0, 2, 1)$. Linjen är vinkelrät mot planens normalvektorer. Alltså (anti-)parallell med $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, där $\mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_2$ är normalvektorer till två av planen. Vi verifierar detta dessa plan

$$x - y + 2z = 0 \text{ och } 2x + y - 2z = 3$$

Normalvektorer är $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 2)$ och $\mathbf{n}_2 = (2, 1 - 2)$. Vektorprodukten blir

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (0, 6, 3) \parallel \mathbf{v} = (0, 2, 1)$$

■

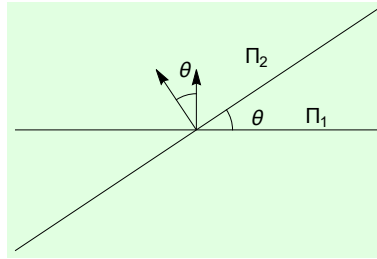
EXEMPEL 6.12 Man kan beräkna vinkeln mellan två plan. I exempel 1.6 har vi ES med två ekvationer och tre variabler, som är ekvationer för två plan.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \end{cases} \quad \text{med lösning} \quad \begin{cases} x = 7t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Först lägger vi märke till att linjen riktningsvektor är $\mathbf{v} = (7, -3, 2)$. Den ligger parallellt med planen och är alltså vinkelrät mot planens normalvektorer $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -2)$ respektive $\mathbf{n}_2 = (0, 2, 3)$. Vi får att $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Vi verifierar detta.

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (7, -3, 2)$$

som bara inte är parallell utan lika med $\mathbf{v}$. Nu till vinkeln mellan planen.



De två planen Π_1 och Π_2 sett från kanten med normaler och mellanliggande vinkel. En sådan vinkel räknas spetsig eller rät, d.v.s. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Den mellanliggande vinkeln θ får vi med skalär produkt.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = -2\sqrt{\frac{2}{39}} < 0.$$

Att $\cos \theta < 0$ säger att vinkeln är trubbig. Ett exakt uttryck för vinkeln är

$$\arccos \left(-2\sqrt{\frac{2}{39}} \right).$$

Vi definierar dock vinkeln som spetsig. Alltså är det supplementvinkeln till denna vinkel, som vi svarar med.

$$180^\circ - \arccos \left(-2\sqrt{\frac{2}{39}} \right) = \arccos \left(2\sqrt{\frac{2}{39}} \right) (\approx 63.1^\circ).$$

■

EXEMPEL 6.13 Givet punkten $S = (4; 5; 7)$ och planet $x + y - 2z - 1 = 0$. Bestäm

- (a) Projektionspunkten av punkten i planet.
- (b) Avståndet mellan punkten och planet.

Lösning

- (a) Projektionspunkten av punkten i planet: Linjen vinkelrät mot planet genom punkten $(4; 5; 7)$ har ekvationen på parameterform

$$(x, y, z) = (4, 5, 7) + t(1, 1, -2)$$

eftersom $\mathbf{n} = (1, 1, -2)$ är normalvektor till planet. För vilket t skär linjen och planet varandra? Sätt in (x, y, z) för linjen i planets ekvation.

$$(t + 4) + (t + 5) - 2(7 - 2t) - 1 = 6(t - 1) = 0 \iff t = 1.$$

Projektionspunkten är alltså $P = (4; 5; 7) + 1 \cdot (1; 1; -2) = (5; 6; 5)$.

- (b) Avståndet d mellan punkten och planet får vi genom att subtrahera punkterna $(5, 6, 5)$ och $(4, 5, 7)$ och sedan ta längden/avståndet.

$$d = |(5, 6, 5) - (4, 5, 7)| = |(1, 1, -2)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

■

EXEMPEL 6.14 Givet två linjer på parameterform

$$L_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{och} \quad L_2 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3 - 2t \\ z = t + 4 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Två linjer i $\mathbb{R}^3$ skär i regel inte varandra. Här gör de det.

- (a) Bestäm skärningspunkten.
(b) Beräkna vinkeln mellan linjerna.

Lösning

- (a) I skärningspunkten behöver inte värdet på parametern t vara densamma för de två linjerna. Byt därför t mot s i den första linjen L_1 och sätt koordinaterna lika.

$$\begin{cases} x = s + 2 = t + 1 \\ y = s + 5 = 3 - 2t \\ z = 1 - 2s = t + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s - t = -1 \\ s + 2t = -2 \\ 2s + t = -3 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \begin{cases} s = -4/3 \\ t = -1/3 \end{cases}.$$

Eftersom vi har en lösning på detta överbestämda ES, får vi skärningspunkten

$$(x, y, z) = -4/3(1, 1, -2) + (2, 5, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

(Verifiera att $t = -1/3$ i linjen L_2 ger samma punkt.)

- (b) Cinkeln mellan linjerna är spetsig eller rät, inte trubbig. Vi använder oss av skalärprodukt mellan riktningsvektorerna.

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, -2), \mathbf{v}_2 = (1, -2, 1) \Rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$

Vinkeln $\theta = 120^\circ$ mellan *vektorerna*, men vinkeln mellan linjerna är $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (Svar).

■

EXEMPEL 6.15

Bestäm avståndet mellan linjen L_2 i föregående exempel och punkten $Q = (4, 5, 7)$.

Lösning

Punkten $P = (1, 3, 4)$ ligger på linjen L_2 . Bilda vektorn $\overrightarrow{PQ} = (4, 5, 7) - (1, 3, 4) = (3, 2, 3)$. Avståndet d kan då skrivas

$$d = |\overrightarrow{PQ}| \sin \varphi$$

där φ är vinkeln mellan $\overrightarrow{PQ}$ och $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 1)$. Eftersom det är "sinus" och inte "cosinus", använder vi vektoriell produkt.

$$d = |\overrightarrow{PQ}| \sin \varphi = \frac{|\mathbf{v}_2| |\overrightarrow{PQ}| \sin \varphi}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{|\mathbf{v}_2 \times \overrightarrow{PQ}|}{|\mathbf{v}_2|}$$

Nu är

$$\mathbf{v}_2 \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-8, 0, 8) \text{ med längd } |(-8, 0, 8)| = 8\sqrt{2}.$$

Därmed är

$$d = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ l.e.}$$

■

EXEMPEL 6.16

- (a) Bestäm en ekvation för linjen $L \perp L_2$ och som går genom punkten $(4, 5, 7)$ och skär linjen L_2 .
- (b) Bestäm skärningspunkten mellan linjerna L_2 och L .

Lösning

- (a) Linjen L :s riktningsvektor kan vi sätta till $\mathbf{v}$. Linjen L är vinkelrät mot $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_2 \times \overrightarrow{PQ}$ och därmed (anti-)parallell med

$$\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_2 \times \overrightarrow{PQ}) = \dots = (-16, -16, -16).$$

Vi väljer $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Ekvationen för linjen L är därmed

$$(x, y, z) = t(1, 1, 1) + (4, 5, 7).$$

- (b) Vi skall lösa ES

$$s(1, -2, 1) + (1, 3, 4) = t(1, 1, 1) + (4, 5, 7) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \begin{cases} s = 1/3 \\ t = -8/3 \end{cases}.$$

Skärningspunkten är $(x; y; z) = \left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{13}{3}\right) =: S$

■

Kommentarer

- Vi kan nu lätt beräkna avståndet mellan punkten $Q = (4, 5, 7)$ och linjen L_2 , se exempel 15. Helt enkelt

$$|S - Q| = \left| -\frac{8}{3}(1, 1, 1) \right| = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ l.e.}$$

EXEMPEL 6.17 Givet punkterna/ortsvektorerna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i planet. Tillsammans med $(0, 0)$ utgör de tre hörn i en triangel. Vad är arean av denna triangel?

Lösning

Man kan beräkna arean med elementär trigonometri. Ex.vis är den tredje sidan som vektor $(x_2, y_2) - (x_1, y_1)$. Således kan alla tre sidornas längder och därmed triangelns area beräknas¹. Vi kan också se (x_1, y_1) som en vektor i $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{a} = (x_1, y_1, 0)$ och p.s.s. $\mathbf{b} = (x_2, y_2, 0)$. Arealen fås då med vektorprodukten mellan dessa.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{Utv. längs kolonn 3}\} = (x_1 y_2 - y_1 x_2) \mathbf{k}.$$

Arealen är alltså

$$T = \frac{|x_1 y_2 - y_1 x_2|}{2}.$$

■

¹Heron's formel