



Lösningsförslag till tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, måndag e.m. 20150824
Ansvarig lärare: Reimond Emanuelsson

1. Beräkna $\operatorname{Im} z$, $|z|$ och $\arg z$...

$$z = \frac{3-5j}{4-j} \cdot \frac{4+j}{4+j} = \frac{17-17j}{17} = 1-j \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im} z = -1 \\ |z| = \sqrt{2} \\ \arg z = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

2p

2. (a) Lös ekvationssystemet.

1.5p

$$\begin{cases} x-y+z = -2 \\ x+z = 1 \\ x-y+2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}.$$

- (b) Determinanten $|\mathbf{A}| = 1$.

2p

- (c) Matrisen

$$\begin{bmatrix} a & a & -a \\ -a & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

ger att $a = 1i$.

2p

3. Givet ekvationssystemet $\begin{cases} -x+y = 1 \\ x-2y = 4 \\ -y = 2 \end{cases}$.

- (a) Den bästa (approximativa) lösningen i Minsta kvadratmetodens mening:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$$

$$\text{där } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ med lösning}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

2.5p

- (b) Medelfelet m.a.p. denna lösning:

$$\frac{\left| \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \mathbf{B} \right|}{\sqrt{3}} = \frac{\left| \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = 1.$$

1.5p

4. Följande punkter, i ett ONH-system, är givna.

$$P = (-2; 0; 1), Q = (2; 2; 1), R = (1; 1; -1), \text{ och } S = (4; 7; -4).$$

- (a) En ekvation för planet Π , som innehåller punkterna P , Q och R . Normalvektor

$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (4, -8, 2), \mathbf{n} = (2, -4, 1)$$

Ekvation:

$$\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = (2, -4, 1) \cdot ((x, y, z) - (-2, 0, 1)) = 2x - 4y + z + 3 = 0.$$

2.5p

- (b) En ekvation för linjen som går genom punkten S och som är vinkelrät mot planet Π :

$$(x, y, z) = t\mathbf{n} + \overrightarrow{OS} = t(2, -4, 1) + (4, 7, -4)$$

1.0p

- (c) Skärningspunkten mellan planet Π och den linje L , som går genom S och är vinkelrät mot planet:

$$\mathbf{n} \cdot (t(2, -4, 1) + (4, 7, -4) - (-2, 0, 1)) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Insatt i linjens ekvation får vi skärningspunkten

$$W = (6, 3, -3)$$

3.0p

5. Betrakta binomet $f(z) := z^2 + 8...$

(a) Den binomiska ekvationen

$$z^3 = -8 \iff z = -2 \text{ eller } z = 1 \pm i\sqrt{3}$$

2.0p

(b) Polynomet $f(z)$ som en produkt av två reella polynom av så låg grad som möjligt är $f(z) = (z+2)(z^2-2z+4)$.

1.5p

6. Polynomet $g(z) = 2z^3 - 5z^2 + 4z + 24$ har ett komplext nollställe där imaginärdel är 1, säg $z_1 = a + j$ och således även $z_2 = a - j$. Insatt i ekvationen $g(z) = 0$ ger det

$$g(a+j) - g(a-j) = j(12a^2 + 4a - 8) = 0 \iff \begin{cases} a = -1 \\ a = 2/3 \end{cases}$$

Alltså är $a = -1$.

$$\begin{cases} z = -1 \pm i \\ z = 3/2 \end{cases} \iff g(z) = (2z-3)(z^2+2z+2)$$

5.0p