

Lösningsförslag till Tentamen i Linjär algebra för DAI1 och EI1, LMA 212 , 20141030 f.m.

1. (Givet det komplexa talet $z = \frac{j-5}{3+2j}$.) Beräkna...

(a)

$$|z| = \frac{|-5+j|}{|3+2j|} = \sqrt{\frac{1^2+5^2}{3^2+2^2}} = \sqrt{2}.$$

(b)

$$z = \frac{j-5}{3+2j} \cdot \frac{3-2j}{3-2j} = \frac{-13+13j}{13} = -1+j \Rightarrow \operatorname{Im} z = 1.$$

(c)

$$\arg z = \pi - \arctan(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

2.0 p

2. (Följande ekvationssystem är givet)

(a) Lös ekvationssystemet...

$$\begin{cases} x+y-2z &= 1 \\ x-y-3z &= -6 \\ -x+2y+4z &= 10 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 11 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Vi har alltså lösningen $(x, y, z) = (0, 3, 1)$.

1.5 p

(b) Determinanten av koefficientmatrisen:

2.0 p

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-4+3) = -1.$$

(c)

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} a+3 & a+2 & -2a-4 \\ a+2 & -a-1 & -3a-6 \\ a+2 & -2a-4 & -4a-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \iff a = -2$$

B är invers matris till koefficientmatrisen i (a), omm $a = -2$.

2.0 p

3. (Följande punkter i $\mathbb{R}^3$ är givna.)

$$P = (1, 2, 3), \quad Q = (3, 1, 1), \quad R = (1, 4, 5), \quad S = (3, 4, 7).$$

Sätt $\begin{matrix} \overrightarrow{PQ} = \mathbf{u} = (2, -1, -2), & \overrightarrow{PR} = \mathbf{v} = (0, 2, 2), \\ \overrightarrow{PS} = \mathbf{w} = (2, 2, 4). \end{matrix}$

(a) Vinkeln θ mellan $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$:

$$\cos \theta = \frac{(2, -1, -2) \cdot (0, 1, 1)}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-3}{3 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \theta = \frac{3\pi}{4} (= 135^\circ).$$

2.0 p

(b) En ekvation för planet som innehåller punkterna P , Q och R . Normalvektor är $\mathbf{n} := \mathbf{u} \times \mathbf{v} / 2 = (1, -2, 2)$. Planets ekvation är alltså

$$\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = (1, -2, 2) \cdot (x, y, z) - (1, 2, 3) = x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

2.5 p

(c) Arean av triangeln med hörn i P , Q och R är

$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}}{2} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{9} = 3 \text{ a.e.}$$

1.5 p

(d) Avståndet d mellan planet i (b) och punkten S är lika med höjden h i tetraedern med hörn i P , Q , R och S . Sätt $\mathbf{w} := \overrightarrow{PS} = (2, 2, 4)$. Tetraederns volym är

$$\frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{6} = \frac{|(2, -4, 4) \cdot (2, 2, 4)|}{6} = \frac{12}{6} = 2 = \frac{T \cdot h}{3} = \frac{3h}{3} \iff d \equiv h = 2.$$

2.5 p

4. (Följande ekvationer är ekvationer för två plan i $\mathbb{R}^3$.)

(a) Vi löser detta ES.

$$\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x-2y+z &= -1 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \iff$$

$$\begin{cases} x = 1 - z = 1 - t \\ y = 1 \\ z = z = t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \mathbf{r} = (x, y, z) = t\mathbf{v} + \mathbf{r}_0 = t(-1, 0, 1) + (1, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.0 p

- (b) En ekvation för planet som är vinkelrät mot dessa två plan har normalvektor lika med riktningsvektorn i (a), d.v.s. $\mathbf{n} = (-1, 0, 1)$. Planets ekvation är alltså $(-1, 0, 1) \cdot ((z, y, z) - (0, 0, 0)) = z - x = 0$.

1.5 p

5. (a) Vi vet att a, b, c och d är reella och att $f(z) = 0$.

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= a\bar{z}^3 + b\bar{z}^2 + c\bar{z} + d = \overline{a z^3 + b z^2 + c z + d} = \\ &= \overline{a z^3 + b z^2 + c z + d} = \overline{a z^3 + b z^2 + c z + d} = \\ &= \bar{0} = 0 \text{ d.v.s. } f(\bar{z}) = 0 \text{ V.S.B.} \end{aligned}$$

2.5 p

- (b) (Polynomet $f(z) = 2z^3 + z^2 - 18z - 35$ har ett icke-reellt nollställe med realdel -2 .) För att lösa ekvationen $f(z) = 0$, sätter vi två nollställen till $z_{1,2} = -2 \pm j a$ och därmed är

$$f(z) = 2z^3 + z^2 - 18z - 35 = (2z+b)(z+2-ja)(z+2+ja) = (2z+b)(z^2+4z+4+a^2)$$

Vi jämför koefficienter i VL och HL:

	VL		HL	
z^3 :	2	=	2	$\iff \begin{cases} b = -7 \\ a = \pm 1 \end{cases}$
z^2 :	1	=	$b + 8$	
z^1 :	-18	=	$8 + 2a^2 + 4b$	
z^0 :	-35	=	$b(4 + a^2)$	

Alltså är

$$f(z) = (2z - 7)(z^2 + 4z + 5) = 0 \iff \begin{cases} z = 7/2 \\ z = -2 \pm j \end{cases}$$

3.0 p

6. Lösning av ekvationen $z^3 + 64j = 0$:

$$z^3 + 64j = 0 \iff z^3 = -64j. \quad z^3 = r^3 e^{3j\alpha} = 64e^{3\pi j/2} \iff \begin{cases} r^3 = 64 \\ 3\alpha = 3\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} r = 4 \\ \alpha = \pi/2 + 2\pi n/3 \end{cases}$$

Med $n = -1, 0, 1$ får vi

$$\begin{aligned} n = -1: & \quad \alpha_1 = -\pi/6, & z_1 &= 4 \cdot e^{-\pi j/6} = 4(\sqrt{3}/2 - j/2) = 2\sqrt{3} - 2j \\ n = 0: & \quad \alpha_2 = \pi/2, & z_2 &= 4 \cdot e^{\pi j/2} = 4j \\ n = 1: & \quad \alpha_3 = 7\pi/6, & z_3 &= 4 \cdot e^{7\pi j/6} = 4(-\sqrt{3}/2 - j/2) = -2\sqrt{3} - 2j \end{aligned}$$

3.0 p