Chalmers Tekniska Högskola

Lösningsförslag till Dugga 2 för TIDAL 1 och TIELL 1, LMA 212 0104, 20191017, 13.00-15.00

Lärare Reimond Emanuelsson, tel 772 5892/0708 948 456

1. (a) En ekvation för linjen genom punkterna P och Q på parameterform är ex.vis

$$(x, y, z) = t\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OP}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1.0 p

(b) En ekvation för planet Π, som innehåller det tre punkterna, (uttryckt i punkterna):

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = 0.$$

1.0 p

(c) Ett uttryck för arean av triangeln, som har hörn i de tre punkterna:

$$T = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}||}{2}$$

1.0p

(d) En fjärde punkt S, som inte ligger i planet i (b), är given. Ett uttryck för volymen av tetraedern med hörn i de fyra punkterna:

$$V = \frac{|(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ}) \cdot \overrightarrow{PS}|}{6}$$

2.0p

(e) Uttryck för avståndet d mellan punkten S och planet Π i de tre punkterna:

$$d = \frac{|(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS}|}{||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}||}$$

2.0p

2. Vektorerna i $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = (2, 0, 0), \\ \boldsymbol{v} = (0, 3, 0), \\ \boldsymbol{w} = (0, 0, 4) \end{cases} \quad \text{är givna.}$$

De bildar ett högersystem i den ordningen. Förenkla följande uttryck

(a) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \|\|\boldsymbol{u}\|\|^2 = 4$	(b) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = (0, 0, 0)$	(c) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$	(d) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (0, 0, 6)$
(e) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 24$	(f) $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 0$	(g) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (0, 0, 0)$	(h) $\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (0, 0, -36)$

0.5+0.5+0.5+0.5 p

1+1+1+1 p

3. Beräkna determinanten av matriserna...
Alla termer i determinanten av $\boldsymbol{A}$ är noll utom möjligen $dgij$ med + eller - framför. Antal inversioner av kolonnindexen: $(4, 3, 2, 1) \sim (1, 3, 2, 4) \sim (1, 2, 3, 4)$, alltså två inversioner, som ger faktorn $(-1)^2 = 1$. Alltså är determinanten

$$\det \boldsymbol{A} = \det \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & i & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^2 dgij = dgij\,.$$

$$\det \boldsymbol{B} = \det \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \end{bmatrix} = \{\text{Utveckling längs kolonn 4}\} =$$

$$a_{4,4} \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = -a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4}$$

1.0+2.0+1.0 p