Lösningsförslag till Tentamen i Linjär algebra, 3.7 hp, LMA212 för DAI1 och DEI1, 20190828, 08.30-12.30

tel 031 772 5892/0708 948 456. Lärare: Reimond Emanuelsson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare

1. Låt $z = \dfrac{7-3j}{5+2j}$.

   (a) Förenkla $z\ldots$
$$z = \frac{7-3j}{5+2j}z = \frac{7-3j}{5+2j}\cdot z = \frac{5-2j}{5-2j} = \frac{29-29j}{29} = 1-j$$
   (b) Beräkna $|z| = \sqrt{2}$. (c) Bestäm $\operatorname{Im} z = -1$. (d) Bestäm $\arg z = -\pi/4$. 2.0p

2. Givet matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Beräkna
$$\det \boldsymbol{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$
   (b) Lös matrisekvationen $\boldsymbol{X} = [x \quad y \quad z]^T$: $\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ldots$
$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{array}\right].$$
   Om $a \neq 1$ inga lösningar och om $a = 1$ är ES ekvivalent med
$$\big\{x + y - 2z = 13y + z = 0 \quad \Longleftrightarrow (x, y, z) = (7t+1, -t, 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
1.0p+1.5p

   (c) Lös ekvationen
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$
1.5p

3. (a) Givet matrisekvationen på matrisform
$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
   så att matrisekvationen saknar lösning $\boldsymbol{x}$, ty olika rang p koefficient- och totalmatris. 0.5p

   (b) Lösning med MK-metoden:
$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{b} \text{ d.v.s. } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
2.5p

   (c) Medelfelet
$$\eta = \frac{|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|}{\sqrt{3}} = \frac{|(-1,1,1)|}{\sqrt{3}} = 1.$$
1.0p

   (d) Visa att matrisen
$$\boldsymbol{A}_L^{-1}\cdot\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   är vänsterinvers och lösning av matrisekvationen m.h.a. $\boldsymbol{A}_L^{-1}$:
$$\boldsymbol{A}_L^{-1}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
1.0p

4. Givet punkterna $P = (0;0;0)$, $Q = (2;2;1)$ och $R = (0;3;3)$.

   (a) Arean av triangeln T med hörn i P, Q och R: Arean T är
$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{|(3,-6,6)|}{2} = \frac{9}{2} \text{ a.e.}$$
2.0p

   (b) Normalvektor är $\boldsymbol{n} = (1,-2,2)$, så en ekvation för planet är $x - 2y + 2z = 0$. 2.0p

5. Givet planen Π_1 och Π_2 med ekvationerna $\begin{cases} \Pi_1 : x - 2y + z = 0 \\ \Pi_2 : 3x - z = 0 \end{cases}$.

   (a) En ekvation för skärningslinjen mellan planen är $(x, y, z) = t(1,2,3), \quad t \in \mathbb{R}$. 1.5p

(b) En ekvation för planet $\Pi \perp \Pi_1, 2$: Planen går genom origo $(0;0;0)$ och har normalvektor $\boldsymbol{n} = (1,-2,1) \times (3,0,-1) = (2,4,6)$. En ekvation för Π är $x+2y+3z = 0$. Alternativt kan man ta linjens riktningsvektor $\boldsymbol{v} = (1,2,3) = \boldsymbol{n}$, som normalvektor till planet. 2.5p

6. Betrakta binomet $f(z) = 27z^3 + 8$.

   (a) ekvationen

   $$f(z) = 0 \Longleftrightarrow (3z)^3 = -8 \Longleftrightarrow r^3 e^{3j\theta} = 8e^{(2n\pi - \pi)j}.$$

   2.0p

   (b) Skriv $f(z)$ som en produkt av reella polynom av så låg grad som möjligt. 2.0p

7. Polynomet $g(z) = 4z^3 + 12z^2 + z + 3$ har rent imaginärt nollställe z_1.

   (a) Lös ekvationen $g(z) = 0$. 3.0p

   (b) Faktorisera $g(z)$ i reella polynom av så låg grad som möjligt. 1.0p