Lösningsförslag till Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI1 och EI1, torsdag f.m. 20191031
Ansvarig lärare: Reimond Emanuelsson

1.
$$z = \frac{2-5j}{3+7j}\cdot\frac{3-7j}{3-7j} = \frac{-29-29j}{58} = -\frac{1}{2}-\frac{j}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -1/2, \quad |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg z = -\frac{3\pi}{4}$$

2p

2. Betrakta ekvationssystemet...

   (a) Lös ekvationssystemet... 2p

   2p

$$\begin{cases} x+y-2z &= 1 \\ 3y+z &= 10 \\ x+3y-z &= 8 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & .1 & 8 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

   Svar: $(x, y, z) = (0, 3, 1)$.

   (b) Beräkna determinanten av koefficientmatrisen $\boldsymbol{A}$ i (a): Den är 1 p.g.a. radoperationerna i (a).

   (c) Bestäm p så att

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2p & -5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ p & -2 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_3$$

   som ger att $p = 3$. 2p

3. Givet ekvationssystemet $\begin{cases} x-y &= 3 \\ 2x-y &= 4 \\ y &= -2 \end{cases}$.

   (a) Den bästa (approximativa) lösningen i Minsta kvadratmetodens mening ges av $\boldsymbol{x}$ uppfyllande matrisekvationen

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b} \text{ d.v.s. } \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

   Detta ger

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \text{ d.v.s. } \hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   2.5p

   (b) Medelfelet: Först

$$\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

   d.v.s. medelfelet $= 0$. Det betyder att ursprungligt ES har lösning. 1.5p

   (c)

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Lös ekvationssystemet m.h.a. denna matris:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   1p

4. Följande punkter, i ett ONH-system, är givna.

$$P = (1; 2; 0),\ Q = (-1; 2; 0),\ R = (2; 3; 1).$$

   (a) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 2, -2).$$

   Normalvektor $\boldsymbol{n} = (0, 1, -1)$.

$$\boldsymbol{n}\cdot((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = y - z - 2 = 0.$$

   3.0p

(b) Linjen L: $(x,y,z) = t(-3,1,1) + \overrightarrow{OP} = t(-3,1,1) + (1,2,0), \quad t \in \mathbb{R}$, ligger i planet i (b), ty

$$t + 2 - t - 2 = 0.$$

1.0p

(c) Linjen L är skärningslinje mellan planet Π i (b) och ett plan Π_1 som är vinkelrät mot planet Π.
Normalvektor för Π_1 är

$$\boldsymbol{n}_1 := \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,3,3).$$

Planet Π_1:s ekvation

$$(2,3,3) \cdot ((x,y,z) - \overrightarrow{OP}) = 2x + 3y + 3z - 8 = 0.$$

3.0p

5. Betrakta binomet $f(z) := z^4 + 64$.

(a)

$$f(z) = z^4 + 64 = (z^2)^2 + 2z^2 \cdot 8 + 8^2 - 16z^2 = (z^2+8)^2 - (4z)^2 = (z^2 - 4z + 8)(z^2 + 4z + 8) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 = -4 \\ z^2 + 4z + 4 = (z+2)^2 = -4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + 2j \\ z_2 = 2 - 2j \\ z_3 = -2 + 2j \\ z_4 = -2 - 2j \end{cases}$$

2.0p

(b)

$$f(z) = (z-2-2j)(z-2+2j)(z+2-2j)(z+2+2j) = \left(z^2 - 4z + 8\right)\left(z^2 + 4z + 8\right).$$

2.0p

6. Betrakta polynomet

$$g(z) = z^2 - (1-2j)z + (3-3j)$$

(a) Lös ekvationen $g(z) = 0$:

$$g(z) = z^2 - (1-2j)z + (3-3j) \Longrightarrow (z + j - 1/2)^2 = (j - 1/2)^2 - 3 + 3j = -15/4 + 2j = (a + jb)^2$$

$$\begin{cases} -15/4 = a^2 - b^2 \\ 2 = 2ab \\ \dfrac{17}{4} = a^2 + b^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2/4 = 2a^2, \quad a = 1/2 \\ b = 2 \end{cases} \quad (z + j - 1/2)^2 = (1/2 + 2j)^2 \Longleftrightarrow$$

$$z = z_1 = 1/2 - j + 1/2 + 2j = 1 + j, \quad z = z_2 = 1/2 - j - 1/2 - 2j = -3j$$

2.0p

(b) $g(z) = (z - z_1)(z - z_2) = (z - 1 - j)(z + 3j)$ 1.0p