# Blandade uppgifter på innehåll i läsvecka 3

**Uppg 13.1.4** Bestäm de stationära punkterna och deras karaktär till funktionen

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

**Lösn.**

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 4x^3 - 4y = 0 \\ f_2(x,y) = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \underbrace{(0,0), (1,1) \text{ eller } (-1,-1)}_{\text{stationära punkter}}$$

För att avgöra de stationära punkternas karaktär studerar vi Hessianen:

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{21}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathcal{H}(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

$\therefore$ f har en sadelpunkt i $(0,0)$

$$\det(\mathcal{H}(1,1)) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 4^2 > 0, \quad f_{11}(1,1) = 12 > 0$$

$\therefore$ f har ett lokalt minimum i $(1,1)$

$$\det(\mathcal{H}(-1,-1)) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 - 4^2 > 0, \quad f_{11}(-1,-1) = 12 > 0$$

$\therefore$ f har ett lokalt minimum i $(-1,-1)$

Uppg. 13.1.11 Bestäm de stationära punkterna och deras karaktär till funktionen

$$f(x,y) = xe^{-x^3+y^3}$$

lösn.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = e^{-x^3+y^3} - 3x^3 e^{-x^3+y^3} = (1-3x^3)e^{-x^3+y^3} = 0 \\ f_2(x,y) = 3xy^2 e^{-x^3+y^3} = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad (x,y) = (\sqrt[3]{1/3}, 0)$ (den enda stat. punkten)

För att avgöra dess karaktär studerar vi Hessianen

$$\mathcal{H}(x,y) = e^{-x^3+y^3} \begin{bmatrix} -9x^2 - 3x^2(1-3x^3) & 3y^2(1-3x^3) \\ 3y^2 - 9x^3y^2 & 6xy + 9xy^4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathcal{H}(\sqrt[3]{1/3}, 0)) = \begin{vmatrix} -9\sqrt[3]{1/9} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

vilket inte ger någon info om punktens karaktär. Vi noterar istället att;

$$f(\sqrt[3]{1/3}, y) = \sqrt[3]{1/3}\, e^{-\frac{1}{3}+y^3} \begin{cases} > f(\sqrt[3]{1/3}, 0) & \text{då } y > 0 \\ < f(\sqrt[3]{1/3}, 0) & \text{då } y < 0 \end{cases}$$

så $f$ antar både större och mindre värden än $f(\sqrt[3]{1/3}, 0)$ i varje omgivning av $(\sqrt[3]{1/3}, 0)$.

$\therefore$ $f$ har en sadelpunkt i $(\sqrt[3]{1/3}, 0)$

Uppg 13.2.9 Temperaturen på en cirkulär skiva $x^2+y^2 \leq 1$ ges av $T(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$
Bestäm den största och minsta temperaturen på skivan.

Lösn.
$$\begin{cases} T_1(x,y) = (1-2x(x+y))e^{-x^2-y^2} = 0 \\ T_2(x,y) = (1-2y(x+y))e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1-2x(x+y) = 0 \\ 1-2y(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x(x+y) = 0 \\ 2x(x+y) = 2y(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1-2x(x+y) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4x^2 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \text{ eller } \left(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}\right)}_{\text{stat. punkter}} \quad \Bigg| \quad f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \underline{\underline{e^{-1/2}}} \qquad f\left(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}\right) = \underline{\underline{-e^{-1/2}}}$$

Båda ligger inuti cirkeln $x^2+y^2 \leq 1$
ty $\left(\frac{\pm 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pm 1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$

Varje punkt $(x,y)$ på randen $x^2+y^2 = 1$ kan beskrivas i polära koordinater enl.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

I en sådan punkt är;

$$f(\cos t, \sin t) = \underbrace{(\cos t + \sin t)e^{-1}}_{g(t)}$$

$$g'(t) = (\cos t - \sin t)e^{-1} = 0 \Leftrightarrow \cos t = \sin t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ eller } \frac{5\pi}{4}$$

då $0 \leq t < 2\pi$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1} = \underline{\underline{\sqrt{2}\,e^{-1}}}$$

$$g\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1} = \underline{\underline{-\sqrt{2}\,e^{-1}}}$$

Eftersom $e^{-1/2} > \sqrt{2}\,e^{-1}$ (ty $e > 2$) så ser vi att det största och minsta värde som $T$ antar på cirkelskivan är $\underline{e^{-1/2} \text{ resp. } -e^{-1/2}}$.

---

Uppg. 13.3.6 Bestäm kortaste avståndet från origo till ytan $xyz^2 = 2$.

lösn. Vi söker $\min\limits_{\underbrace{xyz^2 - 2}_{g(x,y,z)} = 0} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{\text{avståndet till origo}}$

Minimum av $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ antas i samma punkt/punkter som där $x^2+y^2+z^2$ är som minst, så för att få lite enklare kalkyler minimerar vi istället $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ under bivillkoret $g(x,y,z) = xyz^2 - 2$. Vi söker då stationära punkter till Lagrange-funktionen $L(x,y,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$$\begin{cases} 2x + \lambda yz^2 = 0 \\ 2y + \lambda xz^2 = 0 \\ 2z + \lambda 2xyz = 0 \\ xyz^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda xyz^2 = -2x^2 \\ \lambda xyz^2 = -2y^2 \\ \lambda xyz^2 = -z^2 \\ xyz^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -x^2 & (1) \\ y^2 = x^2 & (2) \\ z^2 = 2x^2 & (3) \\ xyz^2 = 2 & (4) \end{cases}$$

Kvadrerar vi båda led i (4) och använder (2) & (3) så får vi; $\underline{\underline{4}} = x^2y^2z^4 = x^2 \cdot x^2 4x^4 = \underline{\underline{4x^8}} \Rightarrow x = \pm 1$

vilket ger oss de stationära punkterna;

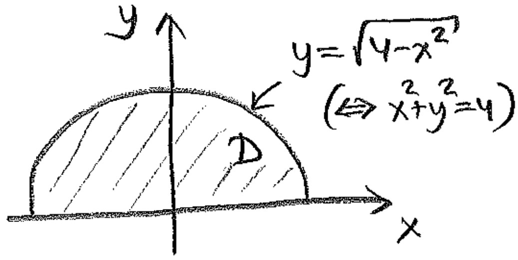
$(1, 1, \pm\sqrt{2}), (-1, -1, \pm\sqrt{2})$

Alla av dessa har avståndet $\sqrt{1+1+2} = \underline{\underline{2}}$ till origo, som därmed också är det kortaste avståndet från ytan $xyz^2 = 2$ till origo.

---

<u>Uppg. 14.1.14</u> Bestäm värdet på dubbelintegralen

$$\iint_D (x+3)\,dA, \text{ där } D: 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$$




<u>lösn.</u> $\iint_D (x+3)\,dA =$

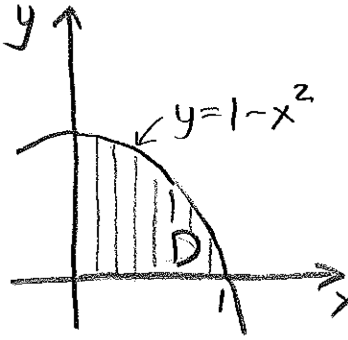
$$= \underbrace{\iint_D x\,dA}_{=0} + 3\underbrace{\iint_D dA}_{=2\pi} = \underline{\underline{6\pi}}$$

arean av halvcirkeln med radie 2.

ty x är udda i x och området D är symmetriskt kring y-axeln.

Uppg 14.2.10 Beräkna $\iint_D x\cos y \, dA$ där D är den del i första kvadranten som begränsas av x-axeln, y-axeln och kurvan $y = 1 - x^2$

Lösn. $\iint_D x\cos y \underbrace{dA}_{dxdy} =$




$$= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x^2} x\cos y \, dy \right) dx$$

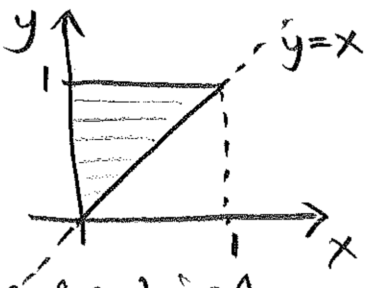
$$= \int_0^1 x \left[ \sin y \right]_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 x\sin(1-x^2) \, dx =$$

$$= \left[ \frac{1}{2}\cos(1-x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$$

---

Uppg 14.2.17 Beräkna $\int_0^1 \left( \int_x^1 \frac{y^\lambda}{x^2+y^2} dy \right) dx \quad (\lambda > 0)$

Lösn. Svårt att bestämma primitiv funktion till $\frac{y^\lambda}{x^2+y}$ m.a.p. $y$




så vi prövar att byta integrationsordning.

$$\int_0^1 \left( \int_0^y \frac{y^\lambda}{x^2+y^2} dx \right) dy = \int_0^1 y^\lambda \left[ \frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y} \right]_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 y^{\lambda} \frac{\pi/4}{y}\, dy = \frac{\pi}{4} \int_0^1 y^{\lambda - 1}\, dy = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{y^{\lambda}}{\lambda} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4\lambda}}}$$