

MVE470, Flervariabelanalys, läsåret 2019/20

Vecko-PM läsvecka 4

Adams: 14.3 - 14.6 & 10.6

I denna vecka skall vi fortsätta jobba med olika tekniker för beräkning av integraler av funktioner i flera variabler. Avsnitt 14.3 handlar om *generaliserade dubbelintegraler* och *medelvärdessatsen* för dubbelintegraler.

$$\bar{f} = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) dx dy$$

I 14.4 skall vi t.ex. studera hur man gör *variabelsubstitution i dubbelintegraler*, och då speciellt se hur det fungerar vid övergång till *polära koordinater*.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

I avsnitt 14.5 skall vi se hur funktioner av tre variabler kan integreras genom s.k. *trippelintegraler*. Det är inte så stor skillnad på att integrera funktioner av två respektive tre variabler, men i en trippelintegral kan det ibland vara lite klurigare att bestämma integrationsgränserna. En annan skillnad är att det i trippelintegraler också finns många fler sätt att välja i vilken ordningsföljd integrationen skall göras.

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$
$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Vi skall också studera variabelsubstitution i trippelintegraler och i avsnitt 14.6 speciellt se hur det blir med övergång till s.k. *cylindriska koordinater* och *sfäriska koordinater*. Dessa koordinatbyten tas även upp i avsnitt 10.6 som snarare skall betraktas som en del av avsnitt 14.6.

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
14.3	3	7, 10, 14	17, 21
14.4	3, 7, 9, 11	15, 21, 23, 32($u = x + y, v = 3x + 4y$), 35b	25, 27, 33, 36
14.5	1, 3, 5	9, 14, 16, K6	7, 11, 27
10.6	1-14		
14.6	1, 3, 12	11, 15, 16, K7	5, 14.4.29

Veckans studioövning

I veckans studioövning skall vi dels se hur vi *Newtons metod* kan användas för att bestämma stationära punkter till en funktion av flera variabler. Vi skall också studera en metod (*Steepest descent*) för att hitta lokala maximi- och minimipunkter, samt jobba med några färdiga funktioner i Matlab för att bestämma maximum och minimum, både med och utan bivillkor.

Lärmål:

För att uppnå godkäntnivå på kursen förväntas att du kan:

Adams	Mål
14.3	avgöra huruvida en integral är generaliserad och i så fall förklara vad som gör den generaliserad.
14.3	beräkna generaliserad dubbelintegral för $f(x, y) \geq 0$ och därigenom avgöra konvergens/divergens.
14.3	veta vad som menas med medelvärdet av en funktion av två eller tre variabler på ett område.
14.4	ange sambandet mellan cartesiska och polära koordinater samt sambandet mellan areaelementen.
14.4	ange hur ett område givet i cartesiska koordinater transformeras vid övergång till andra koordinater och omvänt.
14.4	känna till vad som menas med att en transformation $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är ett-ett (sid 838).
14.4	beräkna dubbelintegraler med hjälp av variabelsubstitution.
14.5	beräkna trippelintegraler genom upprepad enkelintegration.
14.6	ange sambanden mellan cartesiska och sfäriska/cylindriska koordinater samt sambandet mellan volymelementen.
14.6	beräkna trippelintegraler med hjälp av variabelsubstitution.
14	tillämpa dubbel- och trippelintegral för att bestämma t.ex. area, volym, massa, laddning och tyngdpunkt (ej tröghetsmoment).

För överbetyg förväntas också att du kan:

Adams	Mål
14.3	formulera och bevisa medelvärdessatsen (sats 14.3.3) för dubbelintegraler.
14.4	formulera satsen om variabelsubstitution i dubbelintegraler (sats 14.4.4).
14.4	välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av dubbelintegral
14.6	välja lämplig variabelsubstitution för beräkning av trippelintegral
14	beräkna itererad enkelintegral, två/tre variabler, genom att kasta om integrationsordningen (se t.ex. övn. 14.2.15).

(K6) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K z \, dx \, dy \, dz$$

där K är den kropp som begränsas av ytan $z = 2 - x^2 - y^2$ och xy -planet.

(K7) Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K (1 + z) \, dV$$

där K är den del av enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ där $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.