Blandade uppgifter på innehåll i läsvecka 6

Uppg 15.5.16 Bestäm massan av del del av ytan $z=\sqrt{2xy}$ som ligger ovanför området $0 \le x \le 5, 0 \le y \le 2$ om ytan är belagd med ett material med densiteten $\sigma(x,y,z) = kz$

Lösn. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{2xy}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{2xy}}$

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy = \sqrt{\frac{y}{2x} + \frac{x}{2y} + 1}\, dxdy$$

$$= \sqrt{\frac{y^2 + x^2 + 2xy}{2xy}}\, dxdy = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}}\, dxdy = \frac{|x+y|}{\sqrt{2xy}}\, dxdy$$

$$\text{Massan} = \iint_D \rho(x,y,z)\, dS = \int_0^5 \left(\int_0^2 k\sqrt{2xy}\, \frac{|x+y|}{\sqrt{2xy}}\, dy \right) dx =$$

$$= k \int_0^5 \left(\int_0^2 (x+y)\, dy \right) dx = k \int_0^5 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx =$$

$$= k \int_0^5 (2x+2)\, dx = k \left[x^2 + 2x \right]_0^5 = \underline{\underline{35k}}$$

Uppg 15.5.17 Bestäm den totala laddningen på ytan

$\mathbf{r} = e^u \cos v\,\mathbf{i} + e^u \sin v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$

då laddningsdensiteten på ytan är $\delta = \sqrt{1+e^{2u}}$

Lösn.
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^u \cos v & e^u \sin v & 1 \\ -e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -e^u \cos v\,\mathbf{i} - e^u \sin v\,\mathbf{j} + e^{2u}\mathbf{k}$$

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\,dv = \sqrt{e^{2u} + e^{4u}}\,du\,dv = e^u\sqrt{1+e^{2u}}\,du\,dv$$

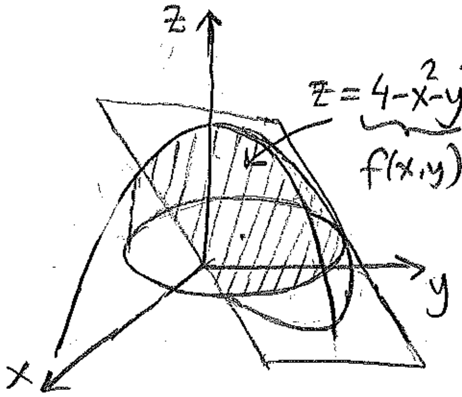
$$\text{Totala laddningen} = \iint_S \delta\, dS =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \sqrt{1+e^{2u}}\, e^u \sqrt{1+e^{2u}}\, dv \right) du =$$

$$= \pi \int_0^1 e^u (1+e^{2u})\, du = \pi \left[e^u + \frac{1}{3} e^{3u} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}(3e + e^3 - 4)}}$$

Uppg. 15.6.7 Bestäm flödet av $\mathbb{F} = y^3\mathbb{i} + z^2\mathbb{j} + x\mathbb{k}$ nedåt genom den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $z = 2x+1$

Lösn.



$$\underbrace{z = 4 - x^2 - y^2}_{f(x,y)}$$

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 2x+1 \end{cases} \Rightarrow 2x+1 = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \quad \left(\begin{array}{c}\text{cirkel med} \\ \text{centrum i } (-1,0) \\ \text{och radie } 2\end{array}\right)$$

$$\hat{\mathbb{N}}\, dS = \pm\left(f_1(x,y)\mathbb{i} + f_2(x,y)\mathbb{j} - \mathbb{k}\right)dxdy =$$

$$= \pm\left(-2x\,\mathbb{i} - 2y\,\mathbb{j} - \mathbb{k}\right)dxdy$$

Vi söker flödet <u>nedåt</u> genom ytan så vi skall ha negativ komponent framför $\mathbb{k}$ så

$$\hat{\mathbb{N}}\, dS = (-2x\,\mathbb{i} - 2y\,\mathbb{j} - \mathbb{k})dxdy$$

$$\text{Flödet} = \iint_S \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_{(x+1)^2+y^2 \le 4} \Big(\underbrace{-2xy^3 - 2y(4-x^2-y^2)^2}_{\text{udda i } y} - x\Big)dxdy$$

$$\mathbb{F} = (y^3, \underbrace{(4-x^2-y^2)^2}_{z^2}, x)$$

$$\overset{\text{av symmetriskäl}}{=} \iint_{(x+1)^2+y^2 \le 4} -x\, dxdy = \begin{bmatrix} x = -1 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= -\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (-1 + r\cos\theta)\, r\, d\theta\right)dr = 2\pi \int_0^2 r\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = \underline{\underline{4\pi}}$$

Uppg. 15.6.8 Bestäm flödet av $\mathbb{F} = z^2 \mathbb{k}$ upp genom den del av sfären $x^2+y^2+z^2=a^2$ som ligger i första oktanten.

Lösn. $z = \underbrace{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}_{f(x,y)}$, $\underbrace{x^2+y^2 \le a^2, \ x \ge 0, y \ge 0}_{D}$

$$\hat{\mathbb{N}} dS = \pm (f_1(x,y)\mathbb{i} + f_2(x,y)\mathbb{j} - \mathbb{k}) dx dy =$$

$$= \pm \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathbb{i} - \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathbb{j} - \mathbb{k} \right) dx dy$$

Vi söker flödet upp ~~upp~~ genom ytan så vi skall ha positiv komponent fram för $\mathbb{k}$ så

$$\hat{\mathbb{N}} dS = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathbb{i} + \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathbb{j} + \mathbb{k} \right) dx dy$$

$$\text{Flödet} = \iint_S \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}} dS = \iint_D (a^2-x^2-y^2) dx dy \overset{\text{polär subst.}}{=}$$

$\mathbb{F} = (0, 0, \underbrace{a^2-x^2-y^2}_{z^2})$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{\pi/2} (a^2-r^2) r \, d\theta \right) dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{-1}{4} (a^2-r^2)^2 \right]_0^a = \frac{\pi a^4}{8}$$

Uppg 15.6.12 Bestäm flödet av $\mathbb{F} = yz\,\mathbb{i} - xz\,\mathbb{j} + (x^2+y^2)\,\mathbb{k}$ upp genom ytan $\mathbb{r} = e^u\cos v\,\mathbb{i} + e^u\sin v\,\mathbb{j} + u\,\mathbb{k}$ där $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$.

Lösn. Från uppg 15.5.17 får vi att;

$$\hat{\mathbb{N}}\,dS = \pm\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right) du\,dv =$$

+ tecken för att få flödet upp genom ytan

$$= (+)\left(-e^u\cos v\,\mathbb{i} - e^u\sin v\,\mathbb{j} + e^{2u}\,\mathbb{k}\right) du\,dv$$

$$\text{Flödet} = \iint_S \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\,dS =$$

$$(\underbrace{e^u \sin v \cdot u}_{yz}, \underbrace{-e^u \cos v \cdot u}_{-xz}, \underbrace{e^{2u}}_{x^2+y^2})$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\pi e^{4u}\,dv \right) du = \pi \left[\frac{1}{4} e^{4u} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}(e^4 - 1)}}$$