

MVE470, Flervariabelanalys, läsåret 2019/20

Vecko-PM läsvecka 6

Adams: 15.5 & 15.6

Denna vecka skall vi studera ytor i rummet. Tidigare har vi studerat funktionsytor och nivåytor, men nu skall vi beskriva ytor (lite mer allmänt) genom *parametrisering*, på ett liknande sätt som för kurvor.

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D$$

Vi skall också definiera begreppet *ytintegral*, på ett liknande vis som kurvintegraler, och se hur vi med ytintegraler bl.a. kan beräkna area, massa och masscentrum av ytor.

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

Vidare skall vi se hur man med en speciell typ av ytintegral s.k. *flödesintegral* kan beräkna hur mycket av ett visst flöde som passerar genom en given yta per tidsenhet.

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Dels skall vi se hur sådana ytintegraler kan beräknas utifrån en given parametrisering, men också speciellt studera fallen då ytan är en funktionsyta eller nivåyta.

Rekommenderade uppgifter

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
15.5	K11, K12, K13	3, 7, K14	4, 9, 13, 15
15.6	1, 3, 5	9, 10, 11, K15	2, 15, 17

Veckans studioövning

Denna veckas studioövning handlar om att beräkna dubbelintegraler numeriskt med lite olika metoder. Dels skall vi göra det lite från grunden, genom approximation med rätblock, men även använda färdiga inbyggda kommandon i MATLAB som `integral2`. De enklare metoderna är liknande dem ni studerat för enkelintegraler dvs. vänster- och högerregeln, mittpunktsregeln och trapetsregeln. De färdiga programmen som finns inbyggda i MATLAB använder mer effektiva metoder som bl.a. bygger på Simpsons formel, men det skall vi inte fördjupa oss i denna gång.

Lärmål:

För att uppnå godkäntnivå på kursen förväntas att du kan:

Adams	Mål
15.5	parametrisera sfärer, cylindrar, koner, plan och funktionsytor.
15.5	definiera begreppet <i>ytintegral av en funktion över en yta</i> och beräkna sådana integraler då ytan är parametriserad eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera.
15.6	definiera begreppet <i>flödesintegral</i> (flöde av ett vektorfält genom en orienterad yta) och beräkna sådana integraler då ytan är parametriserad eller av vanligare typ som du själv bör kunna parametrisera.
15.5-6	tillämpa ytintegral för att bestämma t.ex. area, massa, masscentrum, laddning och flöde

För överbetyg förväntas också att du kan:

Adams	Mål
15.5	beräkna ytintegral av en funktion över en nivåyta (se t.ex. 15.5.4).
15.6	beräkna flödesintegral över en nivåyta (se t.ex. 15.6.2).
15.5-6	motivera definitionerna av begreppen <i>ytintegral av en funktion</i> och <i>flödesintegral</i> .

(K11) Beräkna $\iint_S xz \, dS$ då S är den del av planet $z = 5 + 2x - 2y$ där $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$

(K12) Beräkna arean av den del av ytan $z = xy$ där $x^2 + y^2 \leq 8, x \geq 0, y \geq 0$

(K13) Beräkna $\iint_S y^2 z \, dS$ då S är ytan som ges av parametriseringen
 $\mathbf{r} = u^2 \mathbf{i} + v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$ där $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$

(K14) Beräkna $\iint_S (x^2 + y^2)z \, dS$ då S är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ där $z \geq 0$

(K15) Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur området $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.