

Sammanfattning av Läsvecka 5 - v2

Läsvecka 5 var ganska intensiv för föreläsningar: under två dagar gick vi genom sju kapitlen från boken. Här är en kort sammanfattning av de nyckelsaker; det är viktigt att också läsa motsvarande kapitlen från boken samt VeckoPM, men kanske hjälper denna text liten bit. Det finns många ny koncept, speciellt många integraler. Det är viktigt att förstå hur alla av dem räknas, och på vilka olika sätt de beror om kurvor, ändpunkter, och parametrisering!

- Kurvor**
- En vektorvärda delvis glatt (har alla derivator av alla ordning) funktion $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ kallas en parametriserad kurva $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Här $I \subset \mathbb{R}$ är en intervall.
 - Vi kunde anta att $\vec{r}$ är bara kontinuerligt, men så vore några patologiska kurvor möjliga (Peanos kurva, von Koch snöflinga...). Vi ska undvika dom.
 - En kurva $\mathcal{C}$ är värdemängd av $\vec{r}$. Olika parametriserade kurvor kan motsvara samma kurvor $\mathcal{C}$.
 - I praktiken används ord kurva för båda $\mathcal{C}$ och $\vec{r}$. Det beror på kontext, om parametrisering behövs.
 - Tangent av $\vec{r}(t)$ ges av $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
 - I fysik $\vec{r}(t)$ beskriver position, och $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ beskriver hastighet (velocitet). Vi kan också ta högre derivator för motsvarande fysiska koncept.
 - Längd av kurvan $\mathcal{C}$ med parametrisering $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av

$$\int_{\mathcal{C}} ds = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

- En parametriserad kurva $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ har en visst riktning mellan ändpunkter $\vec{r}(a)$ och $\vec{r}(b)$.
- Kurvan $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ kallas sluten, om $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, och enkel om det är injektiv (är inte själv-skärande). Kurvan kallas enkel sluten, om det är sluten och enkel (förutom $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$).
- Kurvan kan komma upp som skärningsmängd av två ytor.

- Vektorfält**
- En glatt vektorvärda funktion $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kallas ett vektorfält.
 - Det är oft en bra ide att tänka om vektorfält som vätska, om tänka hur en partikel rör sig i denna vätska.
 - Banan av partikeln beskrivs med fältlinjer $\vec{r}$. Tangent av en fältlinje är parallel med vektorfältet; $\vec{r}'(t) = \lambda(t) \vec{F}(\vec{r}(t))$, där λ är skalärvärd.
 - Ett vektorfält kallas konservativ, om det är en gradient, dvs. $\vec{F}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$. Funktionen ϕ kallas potential av $\vec{F}$.
 - Anta $\vec{F} = \nabla \phi$ är konservativ, och $\mathcal{C}$ är en nivåkurva för ϕ . Vi vet att nivåkurvor är vinkelrät mot gradienten. Så nivåkurvor är vinkelrät mot $\vec{F}$ och fältlinjer.
 - En nödvändig villkor för $\vec{F} = (F_i, F_j) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ att vara konservativ: $F_{i,2} = F_{j,1}$, som motsvarar $\phi_{1,2} = \phi_{2,1}$. Likdant villkor finns för $\mathbb{R}^3$ också.

- Kurvintegral: skalär**
- Om $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ är en skalärvärd funktion, och $\mathcal{C}$ är en kurva med parametrisering $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, vi kan definiera integral kurvlängdt (båglängdt):

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

- Om $f \geq 0$, integralen ovan betyder arean av ett staket med höjd f . Kan också tänka om integralen som massan av kurvan.
- Integralen ovan beror inte på parametrisering, och blir samma även med olika orienteringar. Beror dock på kurvan $\mathcal{C}$.
- Funktionen $|\vec{r}'(t)|$ är oft problematisk att integrera exakt.

Kurvintegral: vektor

- Om $\vec{F} = (F_i, F_j, F_k)$ beskriver kraft, och $\mathcal{C}$ är en kurva med parametrisering $\vec{r}$ från P till Q , så beskriver

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \hat{T} ds = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b F_i(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt + \int_a^b F_j(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt + \int_a^b F_k(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt \\ &= \int_{\mathcal{C}} F_i(x, y, z)dx + F_j(x, y, z)dy + F_k(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

arbetet längst kurvan $\mathcal{C}$. Här $\hat{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ kallas enhetstangent. Observera att $ds = |\vec{r}'(t)|dt$, så $d\vec{r} = \hat{T}ds = \vec{r}'(t)dt$.

- Integralen ovan beror på parametrisering bara genom orientering (eftersom $\hat{T}$ byter tecken). Omvänd orientering ger minus tecken, dvs. om $\vec{\rho}$ är parametrisering för $\mathcal{C}$ från Q till P , så är motsvarande integral

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\rho} = - \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Samma sak händer om $\mathcal{C}$ är sluten men vi byter orientering.

- För en sluten kurva $\mathcal{C}$ och parametrisering $\vec{r}$, skrivs oft

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Cirkelsymbol bara visar snabbt att vi har en sluten kurva (högra integralen är också absolut korrekt).

- Om vektorfältet $\vec{F} = \nabla\phi$ är konservativ, så beror

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(Q) - \phi(P),$$

inte på kurvan $\mathcal{C}$, bara om de ändpunkter P och Q (och deras ordning; om $\mathcal{C}'$ är en kurva parametriserad från Q till P , så får vi $\phi(P) - \phi(Q)$). Beviset är en ganska enkel tillämpning av kedjeregeln.

- Från föregående resultat det följer att om $\vec{F}$ är konservativ, så har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

för alla slutna kurvor $\mathcal{C}$.