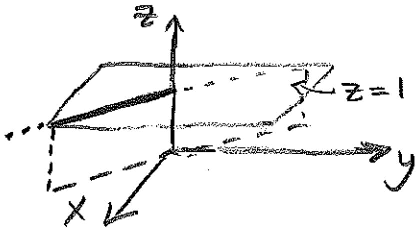
Uppg. 11.1.5 Beskriv partikelbanana för den partikel vars position vid tiden t ges av
$$\mathbb{r} = t^2\,\mathbb{i} - t^2\,\mathbb{j} + \mathbb{k},$$
samt bestäm partikelns hastighet, fart och acceleration.

Lösn. $\mathbb{r}(t) = \underbrace{t^2}_{x}\,\mathbb{i} \underbrace{- t^2}_{y}\,\mathbb{j} + \underset{z}{\underset{\uparrow}{1}}\,\mathbb{k}$

Notera att $y = -x$ och $x \geq 0$, så partikeln löper utefter strålen $z = 1, y = -x, x \geq 0$



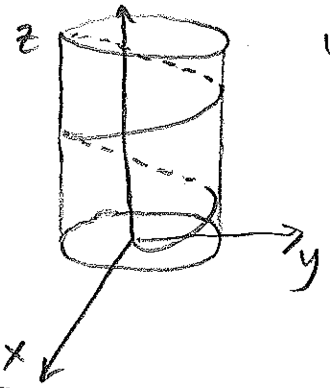
Hastighet: $\underbrace{\mathbb{r}'(t)}_{\mathbb{v}(t)=} = 2t\,\mathbb{i} - 2t\,\mathbb{j}$

Fart: $\|\mathbb{r}'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2} = 2\sqrt{2}\,t$

Acceleration: $\underbrace{\mathbb{r}''(t)}_{\mathbb{a}(t)=} = 2\mathbb{i} - 2\mathbb{j}$

Uppg. 11.1.10 samma som i Uppg. 11.1.5 ovan fast med
$$\mathbb{r} = \underbrace{3\cos t}_{x}\,\mathbb{i} + \underbrace{4\sin t}_{y}\,\mathbb{j} + \underbrace{t}_{z}\,\mathbb{k}$$

Lösn. Partikeln rör sig i en spiral upp längs ytan på den elliptiska cylindern
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$



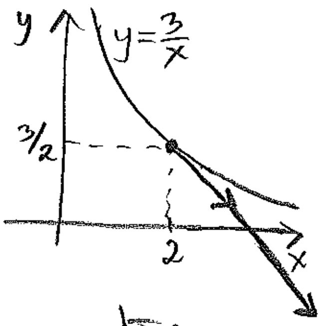
Helix:
$\mathbb{r} = a\cos t\,\mathbb{i} + b\sin t\,\mathbb{j} + ct\,\mathbb{k}$

Hastighet: $\underbrace{\mathbb{r}'(t)}_{\mathbb{v}(t)} = -3\sin t\,\mathbb{i} + 4\cos t\,\mathbb{j} + \mathbb{k}$

Fart: $\|\mathbb{r}'(t)\| = \sqrt{9\underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} + 16\cos^2 t + 1} = \sqrt{10 + 7\cos^2 t}$

Acceleration: $\underbrace{\mathbb{r}''(t)}_{\mathbb{a}(t)=} = -3\cos t\,\mathbb{i} - 4\sin t\,\mathbb{j}$

Uppg 11.1.16 En partikel rör sig i xy-planet mot höger längs kurvan $y = \frac{3}{x}$. Vad är dess hastighet i punkten $(2, \frac{3}{2})$ om dess fart i denna punkt är 10.



Lösn.

$$\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + \frac{3}{x(t)}\,\mathbf{j} \quad , \mathbf{r}(t_0) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} - \frac{3x'(t)}{x(t)^2}\,\mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |x'(t)|\sqrt{1 + \frac{9}{x(t)^4}}$$

Eftersom partikeln rör sig mot höger dvs. ökande x-värden så är $x'(t) > 0$, så

$$\|\mathbf{r}'(t_0)\| = x'(t_0)\sqrt{1 + \frac{9}{x(t_0)^4}} = x'(t_0)\sqrt{1 + \frac{9}{2^4}} = 10$$

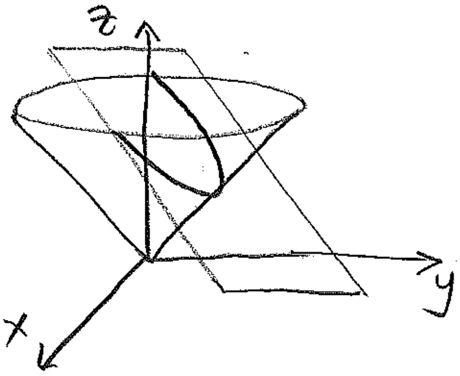
$\Rightarrow x'(t_0) = 8$, vilket ger oss att;

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\mathbf{i} - \frac{3x'(t_0)}{x(t_0)^2}\,\mathbf{j} = \underline{\underline{8\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j}}}$$

Uppg 11.3.11 Låt C vara skärningskurvan mellan planet $z=1+x$ och konen $z^2=x^2+y^2$.
Parametrisera C genom att använda;

a) $t=x$ som parameter
b) $t=y$ — " —
c) $t=z$ — " —

lösn.



a) $$y = \pm\sqrt{z^2-x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ x=t \\ z=1+t}}{=} \pm\sqrt{(1+t)^2-t^2} = \pm\sqrt{1+2t}$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=\pm\sqrt{1+2t}, \text{ med tecken som beror på } y \\ z=1+t \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ z=1+x \end{cases} \Rightarrow (1+x)^2=x^2+y^2 \Rightarrow 1+2x=y^2$$
$$\Rightarrow x=\frac{y^2-1}{2} \Rightarrow z=\frac{y^2+1}{2}$$

$$\begin{cases} x=\frac{t^2-1}{2} \\ y=t \\ z=\frac{y^2+1}{2} \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x=t-1 \\ y=\pm\sqrt{2t-1} \\ z=t \end{cases}$$ (byt t mot $t-1$ i a))

<u>Uppg. 11.3.20</u> Bestäm längden av kurvan

$$\mathbf{r} = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}, \quad -1 \le t \le 2$$

<u>Lösn.</u>

$$\int_C ds = \int_{-1}^{2} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{9t^4+4t^2}\,dt =$$

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

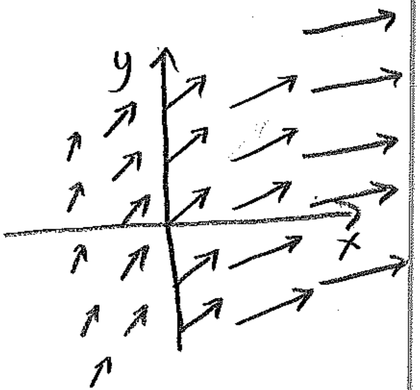
$$= \int_{-1}^{2} |t|\sqrt{9t^2+4}\,dt = \int_{-1}^{0} (-t)\sqrt{9t^2+4}\,dt + \int_{0}^{2} t\sqrt{9t^2+4}\,dt =$$

$$= \left[\frac{-1}{18}\,\frac{(9t^2+4)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{18}\,\frac{(9t^2+4)^{3/2}}{3/2}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(13^{3/2} + 40^{3/2} - 16\right)$$

<u>Uppg. 15.1.5</u> Skissa vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = e^{x}\,\mathbf{i} + e^{-x}\,\mathbf{j}$ och bestäm dess fältlinjer.

<u>Lösn.</u> $\mathbf{F} = \underbrace{e^{x}}_{F_1}\,\mathbf{i} + \underbrace{e^{-x}}_{F_2}\,\mathbf{j}$



Notera att $F_2 = \frac{1}{F_1}$, $F_1 > 0$

och att F_1 bara beror på x

och växer m.a.p. x

Fältlinjerna bestäms av diff.ekv. $\frac{dx}{e^{x}} = \frac{dy}{e^{-x}}$

$$\Leftrightarrow dy = e^{-2x}\,dx \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}e^{-2x} + C$$

Uppg 15.2.2 Avgör om vektorfältet $\mathbb{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ är konservativt och bestäm i så fall en potential till $\mathbb{F}$.

Lösn. $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$

så $\mathbb{F}$ kan vara konservativt.

Vi undersöker då om det finns någon funktion ϕ s.a. $\mathbb{F} = \nabla\phi$

$$\begin{cases} ① \ \frac{\partial \phi}{\partial x} = y & \Rightarrow \phi \overset{④}{=} xy + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} \overset{⑤}{=} \underline{x} + g_y'(y,z) \\ ② \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \underline{x} & ②+⑤ \Rightarrow g_y'(y,z) = 0 \Rightarrow g(y,z) \overset{⑥}{=} h(z) \\ ③ \ \frac{\partial \phi}{\partial z} = z^2 & ④+⑥ \Rightarrow \phi = xy + h(z) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} \overset{⑦}{=} h'(z) \\ & ③+⑦ \Rightarrow h'(z) = z^2 \Rightarrow h(z) = \frac{1}{3}z^3 + C \end{cases}$$

∴ $\mathbb{F}$ är konservativt och $\phi = xy + \frac{1}{3}z^3$ är en potential.