Storgruppsdemonstration 6 mars 2019

Uppg. 16.1.4 Beräkna div $\mathbb{F}$ och curl $\mathbb{F}$ för vektorfältet
$$\mathbb{F} = yz\,\mathbb{i} + xz\,\mathbb{j} + xy\,\mathbb{k}$$

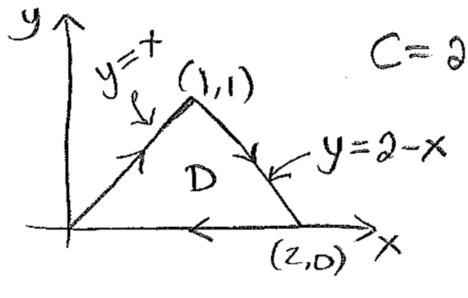
Lösn.
$$\operatorname{div} \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0$$
(så $\mathbb{F}$ är källfritt)

$$\operatorname{curl} \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-x)\mathbb{i} + (y-y)\mathbb{j} + (z-z)\mathbb{k} = \mathbb{0}$$
(så $\mathbb{F}$ är även virvelfritt)

Uppg 16.3.2 Beräkna $\oint_C (x^2 - xy)\,dx + (xy - y^2)\,dy$

då C är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,0)$ orienterad medurs.

Lösn.



$C = \partial D$

Greens formel ger att;

motsatt orientering
$$\oint_{-C} \underbrace{(x^2 - xy)}_{F_1}dx + \underbrace{(xy - y^2)}_{F_2}dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(xy-y^2)}_{F_2} - \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(x^2-xy)}_{F_1} \right)$$
$$= \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (y+x)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[xy + \tfrac{1}{2}x^2 \right]_y^{2-y} dy =$$

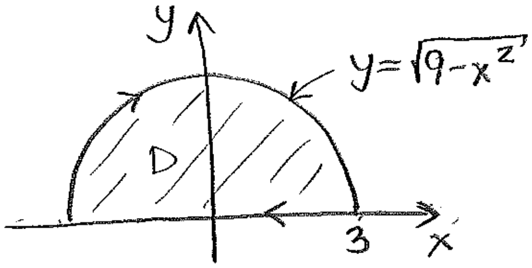
$$= \int_0^1 \left((2-y)y + \frac{1}{2}(2-y)^2 - y^2 - \frac{1}{2}y^2\right)dy = \int_0^1 (2-2y^2)\,dy =$$

$$= \left[2y - \frac{2}{3}y^3\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

så $$\int_C (x^2-xy)\,dx + (xy-y^2)\,dy = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$$

Uppg. 16.3.4 Beräkna $\int_C x^2y\,dx - xy^2\,dy$ då C är randen till området $0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$ orienterad medurs.

Lösn



Greens formel ger att:

$$\oint_C \underbrace{x^2y}_{F_1}\,dx \underbrace{-xy^2}_{F_2}\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_D (y^2+x^2)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^\pi r^2 \cdot r\,d\theta\right)dr =$$

$$= \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81\pi}{4}$$

Uppg 16.4.4 Beräkna flödet av vektorfältet

$\mathbb{F} = x^3\mathbb{i} + 3yz^2\mathbb{j} + (3y^2z + x^2)\mathbb{k}$ ut ur

sfären $S: x^2+y^2+z^2 = a^2 \quad (a>0)$

Lösn.

$$\iint_S \mathbb{F}\bullet\hat{\mathbb{N}}\, dS \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Gauss}\\ \text{Divergenssats.}}}{=} \iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} \operatorname{div}\mathbb{F}\, dV =$$

$$= \iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2} 3x^2+3z^2+3y^2)\,dV \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sfärisk}\\ \text{subst.}}}{=}$$

$$= 3\int_0^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi} \rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\, d\theta\right)d\phi\right)d\rho =$$

$$= 6\pi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^a\left[-\cos\phi\right]_0^\pi = \underline{\underline{\frac{12\pi}{5}a^5}}$$

Uppg. 16.4.13 Området $D: x^2+y^2+z^2 \le 4a^2,\ x^2+y^2 \ge a^2$

begränsas dels av en cylindrisk yta S_1

och en sfärsisk yta S_2. Beräkna flödet

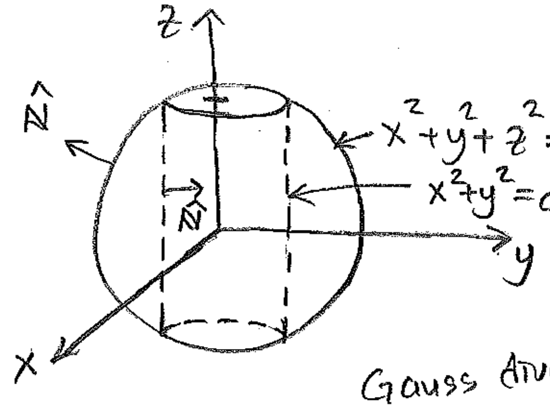
av $\mathbb{F} = (x+yz)\mathbb{i} + (y-xz)\mathbb{j} + (z-e^x\sin y)\mathbb{k}$

(a) ut ur D

(b) ut genom S_1

(c) ut genom S_2

lösn.



$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4a^2 \\ x^2+y^2=a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2=3a^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{3}\,a$$

Gauss divergenssats

a) $$\iint\limits_{S_1 \cup S_2} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint\limits_{D} \underbrace{\operatorname{div}\mathbb{F}}_{=3}\,dV =$$

$$= 3\int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a}\left(\iint\limits_{a^2\le x^2+y^2\le 4a^2-z^2} dx\,dy\right)dz =$$

$$= 3\int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a}\left(\pi(4a^2-z^2)-\pi a^2\right)dz = 3\pi\int_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a}(3a^2-z^2)\,dz =$$

$$= 3\pi\left[3a^2z-\frac{z^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} = 3\pi\left(6a^3\sqrt{3}-2a^3\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{12\sqrt{3}\,\pi a^3}}$$

alt. $$\iiint\limits_{D} \operatorname{div}\mathbb{F}\,dV = 3\iint\limits_{a^2\le x^2+y^2\le 4a^2}\left(\int_{-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz\right)dx\,dy =$$

$$= 3\iint\limits_{a^2\le x^2+y^2\le 4a^2} 2\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = 6\int_a^{2a}\left(\int_0^{2\pi} r\sqrt{4a^2-r^2}\,d\theta\right)dr =$$

$$= 12\pi\left[\frac{-1}{2}\,\frac{(4a^2-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_a^{2a} = \underline{\underline{12\sqrt{3}\,\pi a^3}}$$

b) $S_1: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, $D: 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\sqrt{3}a \le z \le \sqrt{3}a$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -a\cos\theta\,\mathbb{j} - a\sin\theta\,\mathbb{j}$$

På S_1 är $\mathbb{F} = (a\cos\theta + az\sin\theta)\mathbb{i} + (a\sin\theta - az\cos\theta)\mathbb{j} + (\ldots)\mathbb{k}$

$$\iint_{S_1} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_D \Big(-a^2\cos^2\theta - \cancel{a^2 z\sin\theta\cos\theta} -$$
$$- a^2\sin^2\theta + \cancel{a^2 z\cos\theta\sin\theta}\Big)\, dz\, d\theta$$

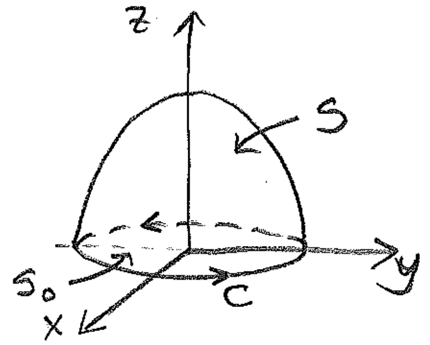
$$= -a^2 \underbrace{\iint_D dz\, d\theta}_{2\pi \cdot 2\sqrt{3}a} = \underline{\underline{-4\sqrt{3}\pi a^3}}$$

c) $$\iint_{S_2} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_{S_1 \cup S_2} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS - \iint_{S_1} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS =$$

$$= 12\sqrt{3}\pi a^3 + 4\sqrt{3}\pi a^3 = 16\sqrt{3}\pi a^3$$

Uppg. 16.5.7 Bestäm cirkulationen av $\mathbb{F} = -y\mathbb{i} + x^2\mathbb{j} + z\mathbb{k}$ runt kanten på $S: z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$ orienterad moturs sett ovanifrån.

Lösn.



$$\hat{\mathbb{N}}\,dS = \pm(f_1\mathbb{i} + f_2\mathbb{j} - \mathbb{k})\,dx\,dy = \\ = (\pm)(-2x\mathbb{i} - 2y\mathbb{j} - \mathbb{k})\,dx\,dy$$

$$\operatorname{curl}\mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x^2 & z \end{vmatrix} = (2x+1)\mathbb{k}$$

$$\oint_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\,dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (2x+1)\,dx\,dy =$$

$$= \underbrace{\iint_{x^2+y^2 \leq 9} 2x\,dx\,dy}_{\substack{=0 \\ \text{av symmetriskäl}}} + \underbrace{\iint_{x^2+y^2 \leq 9} dx\,dy}_{9\pi} = \underline{\underline{9\pi}}$$

Anm. Notera att C också är randkurva till cirkelskivan $S_0: x^2+y^2 \leq 9,\ z = 0$ och på S_0 är $\hat{\mathbb{N}}\,dS = \mathbb{k}\,dx\,dy$ så

$$\oint_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = \iint_{S_0} \operatorname{curl}\mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\,dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (2x+1)\,dx\,dy$$